

Breuken

Handleiding en antwoorden

10/11/51 venduto in (R)  
giro in infar capanno Gab. di  
La Torre di S. Guido Torino 1936  
Durantula in Vrbina Monte du Surg  
1935 Giadito Roueli

1527  
M. G. Lodi  
In un'altra M.



# Handleiding

## Inleiding

'Breuken' gaat over breuken in allerlei vormen. Zo komen de gewone, de tiendelige, de Egyptische breuken en ten slotte de kettingbreuken aan de orde.

Deze module is -naar de mening van de auteurs- geschikt om te laten verwerken door leerlingen van groep 7 of 8. Uiteraard bent u vrij om een andere keuze te maken.

'Breuken' bestaat uit 12 hoofdstukken. Dit pakket is, in principe althans, zelfstandig door te werken. In elk hoofdstuk staan enkele opdrachten. De bollebozen zullen deze opdrachten in principe zelfstandig kunnen maken. Het zou echter plezierig zijn als u met het kind (of de kinderen) even over het onderwerp praat, zodat de tekst zinvol wordt voor het kind.

Al kunnen en willen bollebozen over het algemeen graag zelfstandig werken, toch is het raadzaam om er op toe te zien dat ze niet geïsoleerd raken van de klas. U zou kunnen overwegen om de betreffende kinderen in tweetallen te laten werken. Dit pakket over breuken is trouwens voor veel kinderen interessant en er is dus alles voor te zeggen om de kinderen in de klas ook te laten 'meegenieten' van de opdrachten. Hoe dat zou kunnen, zullen we straks beschrijven.

Wij raden u aan het pakket van tevoren door te nemen en af en toe zelf eens een opgave te maken. Dat laatste is nuttig omdat u dan zelf de zoekprocessen en eventuele moeilijkheden ervaart waar de kinderen wellicht ook mee geconfronteerd worden.

U heeft natuurlijk alle vrijheid om er naar believeen nog leuke opdrachten aan toe te voegen. De andere kinderen in de klas mogen meegenieten van de exploraties van hun klasgenootjes. Een leuke manier om ze bij het bollebozenwerk te betrekken is de volgende: er kan ze verteld worden welke opdrachten de bollebozen hebben gekregen. De laatsten kunnen het resultaat van hun speurwerk aan de klas vertellen. De klasgenootjes zouden van tevoren kunnen bedenken welke vragen ze willen en kunnen stellen.

## Didactische aanwijzingen voor de leerkracht

Maak van tevoren met de kinderen concrete afspraken over de gang van zaken.

- Spreek momenten af waarop u met het kind (of de kinderen) de voortgang bespreekt. Dat kan bijvoorbeeld zijn nadat ze een hoofdstuk hebben doorgewerkt. Denkt u eraan dat juist deze leergierige kinderen met veel meer vragen kunnen zitten dan andere, 'doorsnee' kinderen. Negeert u hun vragen daarom niet. Mocht u niet meteen een antwoord op hun vraag hebben, dan zou u voor kunnen stellen dat of het kind of uzelf op zoek gaat naar een bevredigend antwoord door internet, een encyclopedie of een gespecialiseerd informatief boek te raadplegen. Zonodig zou u het probleem ook voor kunnen leggen aan de rekenspecialist van de begeleidingsdienst die uw school begeleidt. Moedig het kind in ieder geval aan om toch door te zetten. De (hoog)begaafde leerling is meestal niet gewend om iets niet te weten. Dit pakket is juist bedoeld om deze kinderen hun grenzen te laten verleggen.
- Om te voorkomen dat u te vaak tussendoor gestoord wordt, spreekt u af wat een kind moet doen als het op een bepaald moment niet verder kan. Hoewel er een verhaal door het pakket loopt staan veel hoofdstukken op zichzelf. Het is aan te raden om een opgave die te moeilijk blijkt, maar even te laten rusten en met de volgende verder te gaan.
- Spreek met de kinderen voor een dag en/of een week een **minimale tijdsinvestering** af. Die kan per kind en per groep verschillen en daar zijn dus geen algemene richtlijnen voor te geven. In het algemeen geldt wel dat het voor de kinderen prettig is om in één aaneengesloten periode intensief met het pakket bezig te kunnen zijn. Dan raken ze thuis in het onderwerp en dat vergroot de motivatie.
- Spreek af welke klassikale instructie deze kinderen in elk geval moeten volgen. In de methode die u gebruikt, is ongetwijfeld ook zinvolle leer- en/of oefenstof voor bollebozen te vinden. Bovendien bevelen we aan om de bollebozen als er nieuwe onderwerpen in de klas aan de orde komen, steeds aan de instructie te laten deelnemen.  
  
*N.B. In dit verband willen we ook wijzen op de mogelijkheid de methode die u gebruikt meer op de knappe rekenaars af te stemmen en wel door deze kinderen alleen de zinvolle en uitdagende oefenstof te laten maken. De rest van de leerstof wordt dan geschrapt. Deze aanpak noemen we 'compacten', in gewoon Nederlands 'indikken'.*

- Zoals gezegd is deze module weliswaar bedoeld voor zelfstandige verwerking, daarnaast moet er ook ruimte zijn voor interactie. Dat wil ten eerste zeggen dat u de kinderen moet stimuleren en ondersteunen, want bollebozen ontdekken veel en stellen voortdurend nieuwe vragen. Maar met interactie wordt ook bedoeld de kinderen bij de groep te blijven betrekken. Slimme kinderen geven vaak zelf aan dat ze het jammer vinden dat ze zo weinig vriendjes hebben om mee te werken en te praten, want die snappen gewoon niets van computers, van..., etcetera. Voorkom dus dat bollebozen geïsoleerd raken van de klas!

*N.B. We doen u het volgende idee aan de hand. Om te beginnen wordt aan de groep verteld dat we een leuk maar lastig probleem hebben (in de 'Breuken' zitten er genoeg). U vertelt wat het probleem is en welke opdracht moet worden uitgevoerd. De knappe rekenaars gaan aan de slag en de bedoeling is dat ze - als ze klaar zijn en iets te melden hebben - in de groep verslag doen van hun aanpak en oplossing. Terwijl de bollebozen aan het werk zijn, worden in de groep vragen voorbereid die aan de 'onderzoekers' gesteld kunnen worden. Wij hebben ervaren dat het mogelijk is een leuk klassengesprek te organiseren dat voor de meeste kinderen interessant was zonder dat de bollebozen te veel in de rol van betweters terechtkwamen. Wij merkten ook dat het goed is om niet één kind, maar twee of drie knappe rekenaars aan het werk te zetten, omdat dan ook eventuele verschillen in aanpak en inzicht ('hij wilde..., maar ik dacht ...') besproken kunnen worden.*
- Spreek met het kind af hoe de rapportage over het gemaakte werk zal zijn. Die rapportage is ten eerste bedoeld voor het kind zelf. Ten tweede voor u als begeleider. In het werkboekje is schrijfruimte opgenomen zodat de antwoorden op de opdrachten in het boekje zelf genoteerd kunnen worden. Aangezien er soms sprake is van uitgebreid rekenwerk om tot een antwoord te komen, is het aanleggen van een werkschriftje aan te bevelen, waarin ze, naast die berekeningen, hun gedachtegangen, oplossingswijzen en problemen vastleggen. Ze kunnen daarin bovendien noteren welke problemen ze niet hebben opgelost. Ze kunnen proberen aan te geven wat de moeilijkheid is en in welke richting ze de oplossing zochten. Als ze dan naderhand weer met het probleem aan de slag gaan en de oplossing vinden, is het interessant om de aanpak te vergelijken met de eerdere werkwijze die niet tot resultaat leidde. Het voordeel van een werk- of logboek is ook dat u tussentijds in de gelegenheid bent de voortgang in de gaten te houden. Bovendien dwingt het kind zichzelf, door het bijhouden van een logboek, wat hij/zij gedacht heeft onder woorden te brengen.

- Het is vaak interessant om te weten welke gedachtegang de leerling volgt. Moedig hem/haar aan om deze op papier te zetten. Een andere mogelijkheid is om het hardop denken met een cassette recorder vast te leggen.
- De leerling moet ervaren dat deze leerstof even belangrijk is als de reguliere leerstof. Dit kan ook tot uiting komen in de wijze van beoordelen of bespreken. Bijvoorbeeld door een aparte vermelding op het rapport: verrijking rekenen ...
- In deze handleiding zijn ook de antwoorden op de diverse opdrachten opgenomen. De formulering van de antwoorden is op de kinderen afgestemd, omdat wij ervan uitgaan dat de kinderen deze antwoorden meestal zelf zullen inkijken. Het is aan u om te beslissen of en wanneer de kinderen deze antwoorden mogen inzien. U kunt bijvoorbeeld het antwoordengedeelte op uw bureau leggen, zodat het kind er naar toe moet lopen om iets na te kijken. Voor het kind bestaat er dan een drempel ten aanzien van het 'even bij het antwoord kijken'. Wanneer er bij een opdracht meer antwoorden mogelijk zijn, dan zal dat aangeduid zijn met een -.

### **Samenstelling van 'Breuken'**

- Een leerlingenboekje met tekst en opdrachten met schrijfruimte voor de beantwoording. 'Breuken' bestaat uit 12 hoofdstukken. Het is eigenlijk alleen in die zin een geheel dat het om één doorlopend verhaal gaat. De hoofdstukken staan meestal betrekkelijk los van elkaar.
- Deze handleiding waarin -naast een algemeen gedeelte- ook de antwoorden opgenomen zijn.

### **Aanvullend materiaal**

Het is wenselijk dat de volgende materialen beschikbaar zijn.

- Een rekenmachine met bij voorkeur 10 cijfers (omdat dan de periodieke herhaling van cijfers achter de komma bij bepaalde breuken beter te zien is).  
Computers hebben vaak een rekenmachine (op het scherm) ter beschikking. Deze rekenmachine kan eventueel ook gebruikt worden.
- Een aantal verschillende rekenmachines, om te onderzoeken op afronden dan wel afkappen.

# Antwoorden

## Algemeen

Wanneer wij, de auteurs van 'Breuken', vinden dat bij een opdracht meer goede antwoorden mogelijk zijn, dan zie je bij dat antwoord een - staan.

## 1 Op weg

### Opdracht 1

- a** In totaal waren er  $2 \times 6 \times 3 = 36$  blokjes chocolade. Dat is dus 7 blokjes ieder en nog één blokje om te verloten. Ze hebben 2 liter = 20 deciliter cola bij zich. Dat is dus 4 deciliter per persoon.
- b** Het kleine wielje gaat  $7 : 5 = 1,4$  keer zo snel als het grote wiel. Anders gezegd: de tandwielen geven een versnelling van 1,4. Het wielje met 5 tanden gaat dus 1,4 keer zo snel als het wielje met 7 tanden.
- c** Een jaar heeft 365,2422 dagen. En een maand heeft 29,5306 dagen. Er gaan  $365 : 29 = 12,586206$  maanden in een jaar.
- d**  $\frac{63}{5} = 12,6$  en  $\frac{365}{29} = 12,586206$ . Het verschil is 0,013794.
- e** Om uit te rekenen hoeveel procent dat is, moet je uitrekenen welk deel 0,013794 van 12,586206 is:  $0,013794 : 12,586206 = 0,0010959$ . Lees dit als 0,001,  $\frac{1}{1000}$ , dus 1‰ of 0,1 %. De fout is dus ongeveer 0,1 %.

Extra uitleg voor de liefhebber:

Je moet het zo zien. Als je  $63 : 5$  neemt in plaats van  $365 : 29$ , dan neem je absoluut gezien ongeveer 0,0137 teveel. Je hebt net uitgerekend dat dat 0,1 % van 12,586206 is. Nu moet je dit terugvertalen naar de radertjes in het planetarium. Je maakt daar de verhouding  $63 : 5$ , maar je moet eigenlijk  $365:29$  hebben. Je zit er dan 0,1% naast.

- f**  $365,2422 : 29,5306 = 12,368262$ .

Het verschil met  $\frac{365}{29}$  is nu 0,217944. Om uit te rekenen hoeveel procent het scheelt moet je uitrekenen welk deel 0,217944 van 12,586206 is:  $0,217944 : 12,586206 = 0,0173$ . Dat is  $\frac{1,73}{100}$ , dus 1,73% ongeveer 1,75%.

## 2 De rekenmachine

### Opdracht 2

- a** 1) Beide rekenmachines geven het goed aan.

2) Beide rekenmachines geven het fout aan.

3) De nieuwe rekenmachine geeft het goed aan, de oude fout.

4) De oude rekenmachine geeft het goed aan en de nieuwe fout.

**b** Een kilometer is duizend meter, een meter is duizend millimeter. Een kilometer is dus:  $1000 \times 1000$  millimeter, dat is 1 miljoen millimeter:

$$2 \text{ km} = 2\,000\,000 \text{ mm.}$$

**c**  $1 \text{ km} = 1\,000\,000\,000 \text{ micrometer.}$

$$1 \text{ km} = 1\,000\,000\,000\,000 \text{ nanometer.}$$

$$1 \text{ km} = 1\,000\,000\,000\,000\,000 \text{ picometer.}$$

**d**  $3 / 2\,000\,000\,000 \setminus 666\,666\,666$

$$3 / 2\,000\,000\,000\,000 \setminus 666\,666\,666\,666$$

$$3 / 2\,000\,000\,000\,000\,000 \setminus 666\,666\,666\,666\,666$$

**e** Je vindt dan:

met micrometers 0, 666 666 666 km,

met nanometers 0, 666 666 666 666 km,

met picometers 0, 666 666 666 666 666 km.

**f** Bij opgave d zag je dat  $2 : 3 = 0,6666 \dots$

En  $\frac{2}{3} = \frac{6}{9}$ . Dan is  $\frac{1}{9}$  ofwel  $1 : 9 = 0,1111 \dots$

En dan is  $\frac{7}{9}$  ofwel  $7 : 9 = 0,77777$ .

**g** --

**h** In het venster zie je: 0.0101010.

**i**  $3 : 16 = 0,1875$  en  $7 : 125 = 0,056$ . Dus  $\frac{10}{\text{noemer}}, \frac{100}{\text{noemer}}, \frac{1000}{\text{noemer}}$  of  $\frac{10.000}{\text{noemer}}$ . Een deling gaat op als de noemer deelbaar is door 10, 100, 1000, 10 000, etcetera.

### 3 Steeds hetzelfde

#### Opdracht 3

**a** Mijn rekenmachine geeft:

$$1 : 7 = 0,142857142$$

$$2 : 7 = 0,285713285$$

$$3 : 7 = 0,428571428$$

$$4 : 7 = 0,571428571$$

$$5 : 7 = 0,714285714$$

$$6 : 7 = 0,857142857.$$

**b** Mijn rekenmachine geeft:

$$5 : 37 = 0,135135135.$$

1 : 37 is het vijfde deel hiervan, dus:  $0,135135135 : 5$ .

Als je handig wil rekenen, dan verdubbel je de teller en de noemer.

Je krijgt dan:  $0,270270270 : 10 = 0,0270270270$ . Dus  $1 : 37 = 0,027027027$

**c**  $1 : 37 = 0,027027027$  (heb je gezien bij b.)

$2 : 37 = 0,054054054$  (het dubbele!)

$3 : 37 = 0,081081081$  (de twee vorige samen!)

$4 : 37 = 0,108108108$  (het dubbele van  $2 : 37$ !)

$5 : 37 = 0,135135135$ , enzovoort.

**d** -

**e** Ja, je kunt altijd vermenigvuldigen met 10, 100, 1000, 10 000, etcetera en dan de oorspronkelijke breuk eraf halen. Je houdt dan respectievelijk: 9, 99, 999, 9999 etcetera keer de breuk over.

Voorbeeld 1 :  $0,141414...$

$$100 \times \text{deze breuk} = 14,141414 \dots$$

Haal je er 1 x de oorspronkelijke breuk vanaf, dan houd je 14 over.

$$100 \times \text{de breuk} - 1 \times \text{de breuk} = 99 \times \text{de breuk}.$$

$$99 \times \text{de breuk} = 14. \text{ Dus de breuk is } \frac{14}{99}.$$

Voorbeeld 2 :  $0,123412341234.....$

$10\,000 \times$  de oorspronkelijke breuk is  $1234,12341234....$

Daar haal je 1 x de oorspronkelijke breuk vanaf.

Je houdt dan 1234 over.

$$\text{Dat is } 10\,000 - 1 = 9999 \times \text{de breuk}.$$

$$\text{De breuk is dus } \frac{1234}{9999}$$

Op deze manier kun je altijd van een rij decimalen die zich steeds herhaalt een gewone breuk maken.

**f** -

## 4 Naast de pyramides

### Opdracht 4

- a  $\frac{6}{11} = \frac{12}{22}$  en  $\frac{1}{2} = \frac{11}{22}$ . Dus  $\frac{1}{22}$  meer.
- b  $\frac{6}{7}$ . Dat is meer dan  $\frac{1}{2}$ . Dus eerst  $\frac{1}{2}$  eraf.  $\frac{6}{7} = \frac{12}{14}$ .  $\frac{1}{2} = \frac{7}{14}$ . Over  $\frac{12}{14} - \frac{7}{14} = \frac{5}{14}$  is iets meer dan  $\frac{1}{3}$ . Dan doe je er  $\frac{1}{3}$  af.  
 $\frac{5}{14} = \frac{15}{42}$  en  $\frac{1}{3} = \frac{14}{42}$ . Over  $\frac{15}{42} - \frac{14}{42} = \frac{1}{42}$ . Dus:  $\frac{6}{7} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{42}$ .
- c  $\frac{15}{17}$ . Dat is meer dan  $\frac{1}{2}$ . Eerst  $\frac{1}{2}$  eraf.  
 $\frac{15}{17} = \frac{30}{34}$  en  $\frac{1}{2} = \frac{17}{34}$ . Over:  $\frac{30}{34} - \frac{17}{34} = \frac{13}{34}$ .  $\frac{13}{34}$  is meer dan  $\frac{1}{3}$ . Dan  $\frac{1}{3}$  eraf.  
 $\frac{13}{34} = \frac{39}{102}$  en  $\frac{1}{3} = \frac{34}{102}$ . Over:  $\frac{39}{102} - \frac{34}{102} = \frac{5}{102}$ .  
 $\frac{5}{102}$  is iets meer dan  $\frac{1}{21}$ . Dan  $\frac{1}{21}$  eraf.  $\frac{5}{102} = \frac{105}{2142}$  en  $\frac{1}{21} = \frac{102}{2142}$ .  
Over:  $\frac{105}{2142} - \frac{102}{2142} = \frac{3}{2142} = \frac{1}{714}$ . Dus  $\frac{15}{17} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{21} + \frac{1}{714}$ .

## 5 Alles op een rijtje

### Opdracht 5

- a Door gelijknamig te maken.  $\frac{5}{7} = \frac{20}{28}$  en  $\frac{3}{4} = \frac{21}{28}$ . Daar past geen breuk met de noemer 28 tussen. Vermenigvuldig daarom de tellers en noemers met 2. Dan vind je de breuken  $\frac{40}{56}$  en  $\frac{42}{56}$ . Daar ligt de breuk  $\frac{41}{56}$  tussen. Dat kan dan het nieuwe huisnummer zijn.
- b Je kunt het als volgt doen: tussen de huisnummers 0 en 1 kunnen de huisnummers 0,1 tot en met 0,9 uitgegeven worden. Moeten er dan later, bijvoorbeeld tussen 0,3 en 0,4, weer nummers worden uitgegeven, dan kunnen dat de nummers 0,31 tot en met 0,39 zijn.
- c  $\frac{1}{4}$  tussen 0 ( $\frac{0}{1}$ ) en  $\frac{1}{3}$ ;  $\frac{2}{4}$  tussen  $\frac{1}{3}$  en  $\frac{2}{3}$  (maar  $\frac{2}{4}$  is gelijk aan  $\frac{1}{2}$ !);  $\frac{3}{4}$  voeg je in tussen  $\frac{2}{3}$  en 1 ( $\frac{1}{1}$ ).
- d Tussen 0 ( $\frac{0}{1}$ ) en  $\frac{1}{4}$  komt  $\frac{1}{5}$ ; tussen  $\frac{1}{3}$  en  $\frac{1}{2}$  ( $= \frac{2}{4}$ ) komt  $\frac{2}{5}$ ; tussen  $\frac{1}{2}$  ( $= \frac{2}{4}$ ) en  $\frac{2}{3}$  komt  $\frac{3}{5}$ ; tussen  $\frac{3}{4}$  en 1 ( $\frac{1}{1}$ ) komt  $\frac{4}{5}$ .
- e Als je ze allemaal hebt ingevoegd, heb je de volgende rij gevonden:  
 $0 ; \frac{1}{9} ; \frac{1}{8} ; \frac{1}{7} ; \frac{1}{6} ; \frac{1}{5} ; \frac{2}{9} ; \frac{1}{4} (= \frac{2}{8}) ; \frac{2}{7} ; \frac{1}{3} (= \frac{2}{6} = \frac{3}{9}) ;$   
 $\frac{3}{8} ; \frac{2}{5} ; \frac{3}{9} ; \frac{4}{9} ; \frac{1}{2} (= \frac{2}{4} = \frac{3}{6} = \frac{4}{8}) ; \frac{5}{9} ; \frac{4}{7} ; \frac{3}{5} ; \frac{5}{8} ; \frac{2}{3}$   
 $(= \frac{4}{6} = \frac{6}{9}) ; \frac{5}{7} ; \frac{3}{4} (= \frac{6}{8}) ; \frac{7}{9} ; \frac{4}{5} ; \frac{5}{6} ; \frac{6}{7} ; \frac{7}{8} ; \frac{8}{9} ; 1$

**f** Probeer het een paar keer:

$$\frac{1}{5} - \frac{2}{9} . \text{ Het verschil is } \frac{10}{45} - \frac{9}{45} = \frac{1}{45}$$

$$\frac{2}{8} - \frac{2}{7} . \text{ Het verschil is } \frac{16}{56} - \frac{14}{56} = \frac{2}{56} = \frac{1}{28}$$

$$\frac{3}{9} - \frac{3}{8} . \text{ Het verschil is } \frac{27}{72} - \frac{24}{72} = \frac{3}{72} = \frac{1}{24}$$

Bekijk zelf ook nog een paar voorbeelden van twee naast elkaar gelegen breuken uit de rij van opdracht e.

Je zult zien dat het verschil steeds een breuk is met teller 1.

**g** Probeer het maar een paar keer. Neem steeds twee breuken en ga ze 'klutsen'.

Kijk of de gevonden breuk tussen de oorspronkelijke breuken ligt.

Voorbeeld 1:

$$\frac{6}{7} \text{ en } \frac{8}{9} . \text{ Klutsen } \rightarrow \frac{14}{16} = \frac{7}{8}$$

$\frac{7}{8}$  ligt inderdaad tussen de  $\frac{6}{7}$  en  $\frac{8}{9}$  (kijk maar bij antwoord e)

Voorbeeld 2:

$$\frac{1}{6} \text{ en } \frac{2}{9} . \text{ Klutsen } \rightarrow \frac{3}{15} = \frac{1}{5}$$

$\frac{1}{5}$  ligt inderdaad tussen  $\frac{1}{6}$  en  $\frac{2}{9}$  (kijk maar bij antwoord e)

Het geldt altijd, maar om te weten te komen hoe dat precies zit, moet je het volgende hoofdstuk maar eens lezen.

## 6 Redeneren

### Opdracht 6

|          |               |               |               |               |               |               |               |               |               |                |
|----------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|----------------|
| <b>a</b> | 1             | (2)           | (3)           | <del>4</del>  | (5)           | <del>6</del>  | (7)           | <del>8</del>  | <del>9</del>  | <del>10</del>  |
|          | (11)          | <del>12</del> | (13)          | <del>14</del> | <del>15</del> | <del>16</del> | (17)          | <del>18</del> | (19)          | <del>20</del>  |
|          | <del>21</del> | <del>22</del> | (23)          | <del>24</del> | <del>25</del> | <del>26</del> | <del>27</del> | <del>28</del> | (29)          | <del>30</del>  |
|          | (31)          | <del>32</del> | <del>33</del> | <del>34</del> | <del>35</del> | <del>36</del> | (37)          | <del>38</del> | <del>39</del> | <del>40</del>  |
|          | (41)          | <del>42</del> | (43)          | <del>44</del> | <del>45</del> | <del>46</del> | (47)          | <del>48</del> | <del>49</del> | <del>50</del>  |
|          | <del>51</del> | <del>52</del> | (53)          | <del>54</del> | <del>55</del> | <del>56</del> | <del>57</del> | <del>58</del> | (59)          | <del>60</del>  |
|          | (61)          | <del>62</del> | <del>63</del> | <del>64</del> | <del>65</del> | <del>66</del> | (67)          | <del>68</del> | <del>69</del> | <del>70</del>  |
|          | (71)          | <del>72</del> | (73)          | <del>74</del> | <del>75</del> | <del>76</del> | <del>77</del> | <del>78</del> | (79)          | <del>80</del>  |
|          | <del>81</del> | <del>82</del> | (83)          | <del>84</del> | <del>85</del> | <del>86</del> | <del>87</del> | <del>88</del> | (89)          | <del>90</del>  |
|          | <del>91</del> | <del>92</del> | <del>93</del> | <del>94</del> | <del>95</del> | <del>96</del> | (97)          | <del>98</del> | <del>99</del> | <del>100</del> |

Neem een honderdveld. Omcirkel 2. Streep daarna alle twee-vouden door.

Want die zijn deelbaar door 2 en zijn dus geen priemgetallen. Daarmee verdwijnt al de helft van alle getallen (behalve 2) Dan streep je alle drie-vouden door (behalve de 3 zelf).

De vier-vouden zijn al weg (via de tweevouden). Dan de vijf-vouden (behalve de 5 zelf). Dat zijn twee kolommen. De 6 en de zes-vouden zijn al weg. Dan de zeven-vouden (behalve de 7 zelf).

De acht-vouden zijn al weg, net als de negen-vouden en de tien-vouden.

Dan de elf-vouden (behalve de 11 zelf) 22, 33, 44 enzovoort tot en met 99 zijn al weg. En  $10 \times 11$  en  $11 \times 11$  vallen buiten het honderdveld. Dus ben je klaar. Lees nu maar wat er over is.

De omcirkelde getallen zijn de priemgetallen tot 100. Deze manier om de priemgetallen te vinden is al heel oud, hij is genoemd naar een oude Griek: Eratosthenos. We noemen de manier 'de zeef van Eratosthenos'. Begrijp je waarom het een 'zeef' genoemd wordt?

**b** -

**c** Probeer het een paar keer:

$$18 = 7 + 11$$

$$30 = 13 + 17$$

$$42 = 13 + 29.$$

Bij deze voorbeelden kun je steeds een even getal schrijven als de som van twee priemgetallen.

Probeer zelf nog een paar voorbeelden.

**d**  $13 \times 89 = 1157$ . Dus:  $\frac{13 \times 89}{61 \times 89} = \frac{1157}{61 \times 89}$   
 $19 \times 61 = 1159$ . Dus:  $\frac{19 \times 61}{89 \times 61} = \frac{1159}{89 \times 61}$   
 $\frac{1159}{89 \times 61}$  is groter dan  $\frac{1157}{89 \times 61}$  (zelfde noemer)  
 Dus:  $\frac{19}{89}$  is groter dan  $\frac{13}{61}$

**e** De geklutste van deze twee breuken is  $\frac{13+19}{61+89}$ , oftewel  $\frac{32}{150}$

**f** Het lijkt erg op de berekening die in de tekst staat:

$$\frac{32}{150} = \frac{13+19}{61+89} = \frac{(13+19) \times 89}{(61+89) \times 89} = \frac{13 \times 89 + 19 \times 89}{(61+89) \times 89}$$

$$\frac{19}{89} = \frac{19 \times (61+89)}{89 \times (61+89)} = \frac{19 \times 61 + 19 \times 89}{(61+89) \times 89}$$

Ook nu zijn de noemers gelijk. In de tellers vind je weer twee producten die gelijk zijn. Het gaat er dus alleen om te bepalen of  $13 \times 89$  groter of kleiner is dan  $19 \times 61$ . Maar dat weet je al!

Dus is inderdaad de geklutste breuk kleiner dan  $\frac{19}{89}$ .

## 7 Nog wat langer klutsen

### Opdracht 7

**a**  $0 ; \frac{1}{4} ; \frac{1}{3} ; \frac{2}{5} ; \frac{1}{2} ; \frac{3}{5} ; \frac{2}{3} ; \frac{3}{4} ; 1$

**b**  $0 ; \frac{1}{5} ; \frac{1}{4} ; \frac{2}{7} ; \frac{1}{3} ; \frac{3}{8} ; \frac{2}{5} ; \frac{3}{7} ; \frac{1}{2} ; \frac{4}{7} ; \frac{3}{5} ; \frac{5}{8} ; \frac{2}{3} ; \frac{5}{7} ; \frac{3}{4} ; \frac{4}{5} ; 1$

Inderdaad, alle breuken met noemers kleiner dan 6 zitten nu in de rij:

$$\frac{1}{2} ; \frac{1}{3} ; \frac{2}{3} ; \frac{1}{4} ; \frac{2}{4} ; \frac{3}{4} ; \frac{1}{5} ; \frac{2}{5} ; \frac{3}{5} ; \frac{4}{5}$$

Er zitten een aantal breuken met noemers groter dan 6 in de rij, maar deze breuken zijn niet compleet.

**c**  $0 ; \frac{1}{6} ; \frac{1}{5} ; \frac{2}{9} ; \frac{1}{4} ; \frac{3}{11} ; \frac{2}{7} ; \frac{3}{10} ; \frac{1}{3} ; \frac{4}{11} ; \frac{3}{8} ; \frac{5}{13} ; \frac{2}{5} ; \frac{5}{12} ; \frac{3}{7} ; \frac{4}{9} ;$   
 $\frac{1}{2} ; \frac{5}{9} ; \frac{4}{7} ; \frac{7}{12} ; \frac{3}{5} ; \frac{8}{13} ; \frac{5}{8} ; \frac{7}{11} ; \frac{2}{3} ; \frac{7}{10} ; \frac{5}{7} ; \frac{8}{11} ; \frac{3}{4} ; \frac{7}{9} ; \frac{4}{5} ; 1$

## 8 Een week later

### Opdracht 8

**a** De reeks 046511627906976744186 wordt steeds herhaald. Dit blok is 21 cijfers lang.

**b** De rekenmachine geeft voor  $3 : 43$  het antwoord 0,0697674. Dat is inderdaad een stukje van de reeks uit opdracht 8a.

Om het blok voor  $\frac{3}{43}$  te vinden moet je op een andere plek in de rij van opdracht 8a beginnen:

$$\frac{3}{43} = 0,069767441860465116279069767441860465116279069767...$$

Mijn rekenmachine geeft voor  $\frac{4}{43} = 0,0930232$ . Dat is niet in de reeks terug te vinden. Of wel?

De helft ervan is 0,0465116. Dat zit wel in de reeks. Daarmee kun je toch de decimalen van  $\frac{4}{43}$

bepalen. Je moet het 'blok' dan met 2 vermenigvuldigen. Bij de helft van  $\frac{4}{43} (= \frac{2}{43})$  was het blok:

0,046511627906976744186. De decimalen van  $\frac{4}{43}$  zijn dan: 0,093023255813953488372

**c** Het gaat slechts om het feit dat je de hele periode op een rekenmachientje niet te zien krijgt.

Je kunt die periode dan met een slimigheidje wel vinden. Dat gaat als volgt:

uit  $1 : 43$  vind je 0,023255814. Zoek in de tabel naar de breuk van de decimalen beginnend met de laatste cijfers van de deling  $1 : 43$ , bijvoorbeeld 814.

Dan vind je bij  $35 : 43$  de decimalen 813953488. De 4 ontstond kennelijk door afronden.

Daarmee heb je al  $\frac{1}{43} = 0,023255813953488$ . Ga weer op zoek naar de laatste decimalen, bijvoorbeeld 88. Dan vind je bij  $38 : 43$  de decimalen 88372093.

Nu heb je  $\frac{1}{43} = 0,023255813953488372093$ .

Uit  $40 : 43 = 0,930232558$  vind je de laatste decimalen die je nog nodig hebt voor het blok.

De laatste cijfers kwamen ook al aan het begin voor.

Daarmee wordt  $\frac{1}{43} = 0,0232558139534883720930232558$

De periode is 21, dat klopt ook.

|          |        |         |
|----------|--------|---------|
| <b>d</b> | noemer | periode |
|          | 3      | 1       |
|          | 6      | 1       |
|          | 7      | 6       |
|          | 9      | 1       |
|          | 11     | 2       |
|          | 13     | 6       |
|          | 15     | 1       |
|          | 17     | 16      |
|          | 19     | 18      |
|          | 21     | 6       |

## 9 Even mag niet

### Opdracht 9

**a**  $\frac{17}{23} + 1 \rightarrow \frac{40}{23}$  ( $40 : 2 = 20$ ;  $20 : 2 = 10$ ;  $10 : 2 = 5$ )  $\rightarrow \frac{5}{23} + 1 \rightarrow \frac{28}{23}$  ( $28 : 2 = 14$ ;  $14 : 2 = 7$ )  $\rightarrow \frac{7}{23} + 1 = \frac{30}{23}$   
( $30 : 2 = 15$ )  $\rightarrow \frac{15}{23} + 1 = \frac{38}{23}$  ( $38 : 2 = 19$ )  $\rightarrow \frac{19}{23} + 1 \rightarrow \frac{42}{23}$  ( $42 : 2 = 21$ )  $\rightarrow \frac{21}{23} + 1 \rightarrow \frac{44}{23}$  ( $44 : 2 = 22$ ;  $22 : 2 = 11$ )  
 $\rightarrow \frac{11}{23} + 1 \rightarrow \frac{34}{23}$  ( $34 : 2 = 17$ )  $\rightarrow \frac{17}{23}$

Het begint met  $\frac{17}{23}$  weer van voren af aan. Er komt dus een eind aan als je uitkomt op de breuk waarmee je bent begonnen. Maar eigenlijk is dat niet waar, want je kunt gewoon doorgaan.

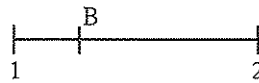
Opnieuw beginnen dus. En je weet nu al dat je weer op die beginbreuk uit zult komen. Dit is een manier om te zeggen dat je oneindig lang door kunt gaan. Er komt nooit een eind aan net als met een repeterende breuk.

- b** Je hebt misschien al gezien dat je altijd tenminste één keer door 2 moet delen. Stel dat de breuk waarmee je begint groter is dan 1. Tel er 1 bij op en deel door 2. Dan heb je eigenlijk het gemiddelde van die breuk en 1 genomen. Dat is altijd kleiner dan de grootste van de twee. Misschien moet je nog een keer door 2 delen, maar daar wordt de breuk alleen maar nog kleiner van. Je kunt het ook tekenen. Neem een stuk getallenlijn en zet daar twee getallen op (bijvoorbeeld 10 en 18). Tel op (28) en deel door 2. Dat geeft 14 (14 komt tussen 10 en 18 te staan). Dat is altijd zo, want het gemiddelde zit altijd tussen de twee getallen in. Nu is een van die getallen het getal 1.

Het andere getal is een breuk die groter is dan 1 (bijvoorbeeld een breuk tussen 1 en 2 in).

Noem deze breuk maar even: B.

Waar ligt  $\frac{B+1}{2}$ ? Precies, er tussen in!

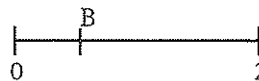


- c** Ook nu reken je het gemiddelde van die breuk en 1 uit. Als de breuk kleiner is dan 1, dan ligt het gemiddelde + 1 tussen de breuk en 1.

Ook nu kun je het weer tekenen. Neem weer een stuk getallenlijn en zet daar 0 en 1 op.

Het ene getal is 1, het andere getal is een breuk tussen 0 en 1 (Noem maar even B)

Waar ligt  $\frac{B+1}{2}$ ? Precies, tussen B en 1 in!



Het gevolg van opdracht 10b en opdracht 10c is dat met welke breuk je ook begint je altijd uitkomt op breuken kleiner dan 1. Je vindt dus uiteindelijk altijd een kringetje.

Kijk maar eens:  $\frac{19}{11}$  (+1 geeft  $\frac{30}{11}$ ;  $30 : 2$ )  $\rightarrow \frac{15}{11}$  (+1 geeft  $\frac{26}{11}$ ;  $26 : 2$ )  $\rightarrow \frac{13}{11}$  (+1 geeft  $\frac{24}{11}$ ;  $24 : 2 \times 4$ )  $\rightarrow \frac{3}{11}$  enzovoort.

- d** Voor noemer 5 vind je:  $\frac{1}{5} \rightarrow \frac{3}{5} \rightarrow \frac{1}{5}$ . Dus het kringetje (1, 3, 1).

Voor noemer 7 vind je:  $\frac{1}{7} \rightarrow \frac{1}{7}$ . Het kringetje (1, 1).

De tellers 3 en 5 zitten daar niet in. Probeer daarom ook  $\frac{3}{7}$  maar eens:

$\frac{3}{7}$  (+1 geeft  $\frac{10}{7}$ ;  $10 : 2$ )  $\rightarrow \frac{5}{7}$  (+1 geeft  $\frac{12}{7}$ ;  $12 : 2 \times 2$ )  $\rightarrow \frac{3}{7}$ .

Het kringetje is nu (3, 5, 3). Nu hebben we alle tellers gehad.

Voor noemer 9 vind ik:

$\frac{1}{9} \rightarrow \frac{5}{9} \rightarrow \frac{7}{9} \rightarrow \frac{1}{9}$ . Het kringetje is (1, 5, 7, 1).

Waar is teller 3?  $\frac{3}{9} \rightarrow \frac{3}{9}$ , met het kringetje (3, 3).

- e** In ieder geval bij noemer 7.

Dat zit zo:  $\frac{1}{7} + 1 = \frac{7+1}{7}$ ; nu is  $7 + 1 = 8$ , en drie keer delen door 2 levert weer een 1 op.

Als je denkt aan 16 (vier keer delen door 2) dan kun je ook  $\frac{1}{15}$  nemen. En ook  $\frac{1}{31}$ !

- f** Jazeker, bij  $\frac{3}{9}$ . Of telt dat niet, omdat je  $\frac{3}{9}$  kunt vereenvoudigen? Dan kan het niet, omdat je het kringetje (3) vindt als de teller steeds 3 is en de volgende (teller + noemer) gelijk is aan 3, 6, 9, 12,....

In al die gevallen is de breuk echter te vereenvoudigen!

Want teller en noemer zijn dan immers 3-vouden.

- g** Ik haal de opdracht even uit elkaar. Eerst eens kijken hoe je van 1 naar 3 komt.

Je begint met teller 1. Je vindt daarna 3 als teller + noemer gelijk is aan 3, 6, 9, 12, ... Dus als de noemer een drie-voud - 1 is (èn deze moet oneven zijn!). De noemer is dan dus 5 of 11 of 17 of ...

Anders gezegd, de noemer moet een zes-voud - 1 zijn.

Hoe kom je nu van 3 naar 1?

Je begint met teller 3. De teller en de noemer moeten dan samen 2, 4, 8, 16, ... zijn.

De noemer moet dan dus 3 minder zijn. De noemer is dan dus 5, 13, 19, ... Oftewel, de noemer moet een acht-voud - 3 zijn. Als je deze twee redeneringen samenvoegt, dan kun je tot de conclusie komen dat je het kringetje (1, 3) vindt als je begint met teller 1 en de noemer een zes-voud - 1 is en tegelijkertijd een acht-voud - 3. Je ziet al dat 5 in beide rijtjes voorkomt. Vind jij nog een andere noemer die in beide rijtjes voorkomt?

**h** Probeer het volgende maar eens:

$$\frac{1}{11} (+3 \text{ geeft } \frac{34}{11}; 34 : 2) \rightarrow \frac{17}{11} (+3 \text{ geeft } \frac{50}{11}; 50 : 2) \rightarrow \frac{25}{11} (+3 \text{ geeft } \frac{58}{11}; 58 : 2 = 29) \\ \rightarrow \frac{29}{11} \rightarrow \frac{31}{11} \rightarrow \frac{1}{11} \rightarrow \text{enzovoort.}$$

De tellers verschillen eerst 16, dan 8, dan 4, dan 2, waarna je weer terug bent bij af.

$$\text{Of: } \frac{1}{3} (+3 \text{ geeft } \frac{10}{3}; 10 : 2) \rightarrow \frac{5}{3} (+3 \text{ geeft } \frac{14}{3}; 14 : 2) \rightarrow \frac{7}{3} \rightarrow \frac{1}{3}.$$

De tellers verschillen nu eerst 4, dan 2, dan vinden we weer de oorspronkelijke breuk. Ook nu gaat het om twee-vouden, net als bij  $\frac{1}{11}$

**i**  $\frac{17}{23} (+1 \text{ geeft } \frac{40}{23}; 40 : 2 \times 2 \times 2) \rightarrow \frac{5}{23} \rightarrow \frac{23}{5} (+1 \text{ geeft } \frac{28}{5}; 28 : 2 \times 2) \rightarrow \frac{7}{5} \rightarrow \frac{5}{7}$   
 $(+1 \text{ geeft } \frac{12}{7}; 12 : 2 \times 2)$   
 $\rightarrow \frac{3}{7} \rightarrow \frac{7}{3} (+1 \text{ geeft } \frac{10}{3}; 10 : 2) \rightarrow \frac{5}{3} \rightarrow \frac{3}{5} (+1 \text{ geeft } \frac{8}{5}; 8 : 2 \times 2 \times 2) \rightarrow \frac{1}{5} \rightarrow 5.$

Nu kan ik niet verder omdat er een heel getal is gekomen.

Komt er altijd een heel getal? Dit is een onderzoek waard!

## 10 De ketting

### Opdracht 10

**a** Stap 1:  $\frac{25}{37}$  is kleiner dan 1

Stap 2:  $\frac{37}{25}$

Stap 3:  $\frac{37}{25}$  aantal helen is 1 ( $\frac{25}{25}$ )

Stap 4:  $\frac{37}{25} = 1 + \frac{12}{25}$

Stap 5 = stap 2:  $\frac{25}{12}$

Stap 3: aantal helen in  $\frac{25}{12}$  is 2 ( $\frac{24}{12}$ )

Stap 4:  $\frac{25}{12} = 2 + \frac{1}{12}$  stop!

Laatste stap:  $\frac{25}{37} = \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{12}}}$

- b** Om goed te zien hoe je van het rijtje 2, 1, 4, 1, 3 weer naar de eerste breuk terugkomt, kun je het beste de kettingbreuk uitschrijven en dan stap voor stap terugrekenen.
- je neemt steeds het vorige getal, telt dat op bij wat je al hebt en keer het om. Het lijkt wel zo'n spelletje uit het vorige hoofdstuk.
- $$3 \rightarrow \frac{1}{3} \rightarrow \frac{1}{3} + 1 = \frac{4}{3} \rightarrow \frac{3}{4} + 4 = \frac{19}{4} \rightarrow \frac{4}{19} + 1 = \frac{23}{19} \rightarrow \frac{19}{23} \rightarrow \frac{19}{23} + 2 = \frac{65}{23} \rightarrow \frac{23}{65}$$
- Inderdaad, je vindt de breuk terug.
- c** De getallen met drie cijfers lopen van 100 tot en met 999. Dat zijn er 899. Elk van die 899 kun je combineren met de 898 andere. In totaal zijn dat  $899 \times 898$  combinaties. Daarvan moet je de helft nemen, want het gaat alleen om die combinaties waarbij het eerste getal groter is dan de tweede (Bij de andere helft is het eerste getal kleiner dan het tweede, de deling levert dan een getal groter dan 1 op). Er zijn dus  $899 \times \frac{898}{2} = 403651$  combinaties die onderzocht moeten worden.
- De computer kan er 500 per seconde uitrekenen. Hij doet dus  $\frac{1}{500} = 0,002$  seconde over één berekening. Om 403651 berekeningen te maken, heeft hij  $403651 \times 0,002 = 807,302$  sec. dat is ongeveer  $13 \frac{1}{2}$  minuut.
- d** De computer doet 0,002 seconde over één berekening. Daar komt nog 0,001 sec. bij voor het vergelijken. Dus voor elke combinatie van getallen heeft de computer 0,003 sec. nodig.
- Er zijn 403651 combinaties. Daar heeft de computer  $403651 \times 0,003 = 1210,953$  sec. voor nodig.
- Dat is ongeveer 20 minuten.
- e** -
- f** Vond jij ook: 12,36826207.
- g** We zagen net al:  $\frac{3652422}{295306} = 12,36826207$
- $\frac{235}{19} = 12,3684210$  volgens mijn rekenmachine. Het verschil is 0,000159. Dat is 0,0013%

## 11 Het eind van het verhaal

### Opdracht 11

- a** -
- b**  $1,42 \times 1,42 = 2,0164$
- Probeer:  $1,419 \times 1,419 = 2,01356$ .
- Nog iets kleiner:  $1,415 \times 1,415 = 2,002225$
- Nog iets kleiner:  $1,414 \times 1,414 = 1,999396$
- Het gezochte getal zit dus tussen 1,414 en 1,415 in, dichterbij 1,414!

- c** De wortel van 1296 is 36. De wortel van 2209 is 47.
- d** De wortel van 2 is 1,414213562 volgens mijn rekenmachine.
- e** De wortel van 3 is 1,732050807.  
Het rijtje van de kettingbreuken wordt 1, 1, 2, 1, 2, 1, 2, ... Het wordt weer periodiek.
- f** De wortel van 5 is 2,23606797.  
Het rijtje van de kettingbreuken wordt 2, 4, 4, 4, 4, ...  
Dit is ook weer periodiek.

## 12 Een laatste redenering

### Opdracht 12

- a** De wortel van 10 is 3,162277660.
- b**  $\sqrt{10} = 3,1622776$

$$\textcircled{3} + 0,1622776$$

$$1 : 0,1622776 = 6,1622799$$

$$\textcircled{6} + 0,1622799$$

$$1 : 0,1622799 = 6,1621926$$

$$\textcircled{6} + 0,1621926$$

Het eerste stukje kettingbreuk van  $\sqrt{10}$  is:  $3 + \frac{1}{6} = \frac{19}{6}$

De volgende is:  $3 + \frac{1}{6 + \frac{1}{6}}$

De gewone breuk die hier bij hoort:  $3 + \frac{6}{37} = \frac{117}{37}$

(met de rekenmachine:  $\frac{117}{37} = 3,1621621$ ; klopt aardig!)

Het rijtje van de kettingbreuken wordt 3, 6, 6, 6, 6, ...

- c** Zie opdracht 12e.
- d** Het rijtje 1, 3, 1, 3, 1, 3 behoort bij de kettingbreuk:

$$1 + \frac{1}{3 + \frac{1}{1 + \frac{1}{3 + \frac{1}{1 + \dots}}}}$$

Neem eerst maar eens een stukje:

$$1 + \frac{1}{3 + \frac{1}{1 \dots}} = 1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4} \text{ stuk erbij}$$

$$1 + \frac{1}{3 + \frac{1}{1 + \frac{1}{3 + \frac{1}{1 + \frac{1}{3}}}}} \quad 3 + \frac{1}{\frac{4}{3}} = \frac{15}{4}$$

verder:

$$3 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\frac{15}{4}}} = 3 + \frac{1}{1 + \frac{4}{15}} = 3 \frac{15}{19} = \frac{72}{19}$$

laatste stap:

$$1 + \frac{1}{\frac{72}{19}} = 1 \frac{19}{72} = \frac{91}{72}$$

en nu verder met de rekenmachine

$$\frac{91}{72} = 1,263888889$$

(

(

(

(



(

(

(

(



