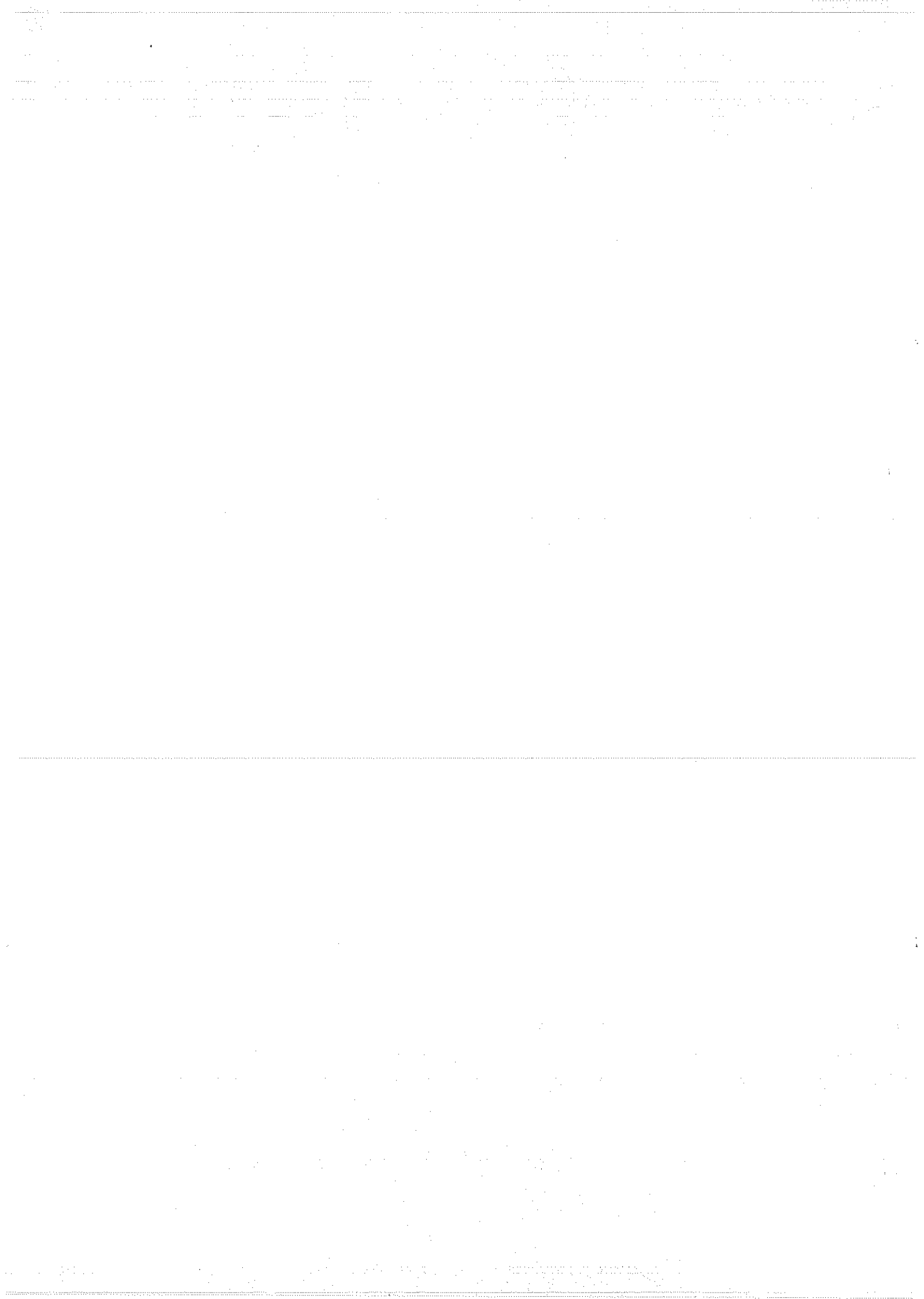


Groot Problemenboek

Handleiding en antwoorden

10/10/10 benvenuto in
gillo - 15/10/10 captauto 300 di
10 La bolla di m. Guido Terino 1136
Durantio 10/10/10 10/10/10 10/10/10
1335 10/10/10 10/10/10

1527
10/10/10 10/10/10
10/10/10 10/10/10
10/10/10 10/10/10



Handleiding

Inleiding

Het Groot Problemenboek is een verzameling van 90 inspirerende en leuke problemen die in het Bolleboos-project aan de orde zijn geweest. De vragen zijn geschikt voor meerdere leeftijds-categorieën in de bovenbouw van de basisschool.

Didactische aanwijzingen voor de leerkracht

Bekijk de problemen van tevoren, zodat u weet wat de kinderen moeten doen. U kunt de problemen voor de kinderen uitzoeken, bijvoorbeeld aansluitend bij wat u op dat moment in de methode behandelt. U kunt ook afwisselend zelf een probleem uitzoeken en dit door de kinderen laten doen. Tenslotte is het ook mogelijk om de kinderen de problemen die ze zelf leuk vinden uit te laten zoeken.

Het moment waarop met het Groot Problemenboek wordt gewerkt bepaalt u zelf. Het kan functioneren als aanvulling op of zelfs als vervanging van een reguliere les, bijvoorbeeld als het een herhalingsles betreft die voor de zeer goede rekenaars niet zinvol is. Gezien de opzet van de module Groot Problemenboek is het niet noodzakelijk om afspraken te maken met de kinderen over voortgang en rapportage. Indien u dat toch wenst, bijvoorbeeld doordat de kinderen alle in plaats van enkele problemen gaan oplossen, verwijzen wij voor de didactische aanwijzingen hieromtrent naar de overige modules in de band Bolleboos.

Het is aan te raden de oplossing van de problemen na te bespreken. Welke oplossingsweg werd gekozen, kan het ook anders, hoe kwamen ze erop? Als de oplossing niet werd gevonden, welke denkrichting werd gekozen, waarom liepen ze vast? De antwoorden en uitwerkingen zijn zo opgesteld, dat de kinderen deze zelfstandig kunnen lezen. De nabespreking kan ook klassikaal plaatsvinden, vooral bij problemen die meerdere kinderen waarschijnlijk interessant vinden. Laat de kinderen vertellen over hun aanpak. Andere kinderen in de groep bereiden de nabespreking voor en verzinnen vooraf vragen die ze kunnen stellen. Van alle problemen zijn (meestal uitgebreide) antwoorden opgenomen in deze handleiding. Soms is er ook een suggestie voor de aanpak opgenomen.

Samenstelling van het Groot Problemenboek

Het Groot Problemenboek bestaat uit 90 problemen in het leerlingenboek en deze handleiding en antwoorden in het deel voor de leerkracht.



Antwoorden

1 Even, oneven

Van twee opeenvolgende getallen is altijd het tweede getal 1 meer dan het eerste. Als het eerste getal even is, dan is het tweede oneven. En andersom, als het eerste oneven is, is het tweede even. Die twee getallen kun je zo tekenen:



en



Als je ze optelt, ziet het er zo uit:



Oneven dus.

Het kan ook zonder plaatje. Je zegt dan: een even aantal kun je eerlijk met z'n tweeën verdelen, een oneven aantal niet. Daar houd je altijd 1 over. Neem nu maar die twee opeenvolgende getallen (als aantal gezien). Verdeel dat met z'n tweeën eerlijk. Als dat zou lukken had je twee gelijke aantallen gehad, maar dat was niet het geval. Oneven dus.

Maar je kunt het ook zo zien. Neem twee opeenvolgende getallen, bijvoorbeeld 5 en 6. De som $5 + 6 = 5 + 5 + 1$. Oneven dus. En zo kun je elk tweetal opeenvolgende getallen splitsen, altijd oneven dus.

Welke oplossing vind je het duidelijkste? Welke oplossing overtuigt je het meest?

2 Vermenigvuldigingen

Hoeveel cijfers? 435×5871 ; wat denk je dat er ongeveer uitkomt? Hoe heb je dat gedaan? Welke schatting zou jij kiezen:

400×5000

500×6000

400×6000

440×5900

De eerste en laatste zijn uitgesloten; de laatste omdat je weer moet schatten.

Hoeveel cijfers hebben de antwoorden? 3.000.000 heeft er 7. Dat is ook de som van 3 en 4, de aantallen cijfers van 435 en 5371. Hoe zit dat met 999×9999 ? Dat is vrijwel $1000 \times 10000 = 10.000.000$, maar iets minder en met 7 cijfers. Geldt die regel altijd? Nee natuurlijk, kijk maar naar $2 \times 4 = 8$; het antwoord bestaat uit één cijfer. En wat vind je van 3921×249 ? Met het rekenmachientje: 976329 met 6 en geen 7 cijfers! Maar $200 \times 5000 = 1.000.000$: zeven cijfers en ook maar net. Je hebt al ontdekt dat de eerste cijfers van de getallen het belangrijkste zijn. Maak van 249 bijvoorbeeld 349 en het antwoord bestaat uit 7 cijfers en dat geldt ook voor 3921; maak daar 4921 van.

3 Knikkers

Eerst maar wat proberen. Te beginnen met een zakje met 3 knikkers. Dan houd je 1 knikker over wanneer je die knikkers eerlijk over 2 kinderen verdeelt, maar 0 knikkers als er 3 kinderen zijn. Ook met 4, 5 of 6 knikkers gaat het mis. Laten we 7 proberen. Je ziet dat je bij 7 knikkers je er 1 overhoudt als je deelt door 2 en door 3. Jammer, bij delen door 4 gaat het mis. Je kunt de mogelijke aantallen knikkers in het zakje op een rijtje zetten:

1 - 2 - 3 - 4 - 5 - 6 - 7 - 8 - 9 - 10 - 11 - 13 - 14 - 15 - 16 - 17 - 18 - 19.

Natuurlijk kunnen er meer knikkers in het zakje zitten, maar je ziet dat het goede antwoord er al bijstaat! Als in het zakje 1 knikker zit, houd je steeds die ene knikker over als je eerlijk verdeelt over 2, 3, 4, 5 of 6 kinderen. Niemand krijgt een knikker, maar je houdt wel 1 knikker over! Dat zal niet de bedoeling zijn, dus even verder kijken.

Laten we de oneven getallen op een rij zetten: 1 - 3 - 5 - 7 - 9 - 11 - 13 - 15 - 17, enzovoorts.

Bij oneven getallen krijg je 1 als rest bij delen door 2. Dat weet je wel. Als je een getal door 3 deelt en rest 1 krijgt, dan is dat een uitkomst van de tafel van 3 plus 1. Want:

1 - 4 - 7 - 10 - 14 - 16 - 19 - 22 - 25 - 28 - 31, enzovoorts

leveren allemaal rest 1 bij delen door 3. Hetzelfde geldt bij de uitkomsten van de tafel van 4 plus 1, de tafel van 5 plus 1 en de tafel van 6 plus 1. Maar een tafel-van-4-plus-1-getal is ook een tafel-van-2-plus-1-getal. En een tafel-van-6-plus-1-getal is natuurlijk ook een tafel van 3-plus-1-getal. Eigenlijk hoef je alleen maar te zoeken naar een getal dat bij delen door 4, 5 en 6 rest 1 oplevert, want dat, nog onbekende, getal geeft ook rest 1 bij delen door 2 en 3! Laten we de uitkomsten van de tafels van 4, 5 en 6 eens opschrijven en met elkaar vergelijken:

Tafel van 4: 4 - 8 - 12 - 16 - 20 - 24 - 28 - 32 - 36 - 40 - 44 - 48 - 52 - 56 - 60 - 64 -

Tafel van 5: 5 - 10 - 15 - 20 - 25 - 30 - 35 - 40 - 45 - 50 - 55 - 60 - 65 - 70 - 75 -

Tafel van 6: 6 - 12 - 18 - 24 - 30 - 36 - 42 - 48 - 54 - 60 - 66 - 72 - 78 - 84 - 90 - 96 -

Zie je het? Het getal 60 komt in al deze tafels voor. Dus als er $60 + 1 = 61$ knikkers in het zakje zitten en je die knikkers verdeelt over 2, 3, 4, 5 of 6 kinderen dan krijg je steeds rest 1. Maar je weet dan nog wel meer goede getallen, want ook $2 \times 60 = 120$ is een uitkomst die in deze tafels voorkomt. Dus ook 121 is een goed getal en 181, 241, enzovoorts.

Maar 1 blijft het kleinste van de gezochte getallen, dan komt 61, 121 en zo verder. Alle uitkomsten van de tafel van 60 plus 1 erbij, want 60 komt in al die tafels voor. Zoek eens uit of je ook een zak knikkers kunt krijgen die bij verdeling onder 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 en 9 kinderen rest 1 oplevert.

4 Optellen

Als je de getallen 1 tot en met 10 bij elkaar optelt krijg je 55. Je zou kunnen zeggen: als je de getallen 11 tot en met 20 bij elkaar optelt krijg je weer 55, maar er komt ook nog 10×10 bij. De uitkomst is dus 155.

Als je de getallen 21 tot en met 30 bij elkaar optelt is de uitkomst dus $155 + 10 \times 10 = 255$. Als je 1 tot en met 100 bij elkaar op zou tellen is de uitkomst dus:

$$55 + 155 + 255 + 355 + 455 + 555 + 655 + 755 + 855 + 955 = 5050.$$

5 Nullen

$1 \times 2 \times 3 \times \dots = 3628800$. Waar komen die nullen vandaan? Als je met 10 vermenigvuldigt komt er één nul achter: $10 \times 5 = 50$; $10 \times 288 = 2880$. Om twee nullen te krijgen moet je met 100 vermenigvuldigen. Ik zie één 10 in $1 \times 2 \times 3 \times \dots \times 9 \times 10$. Wacht even, je kunt ook 10 maken van 2×5 .

Ik kijk nu anders naar dat lange product $1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 \times 8 \times 9 \times 10$, namelijk zo:
 $100 \times 1 \times 3 \times 4 \times 6 \times 7 \times 8 \times 9$. Komt er niet ergens een derde nul vandaan? Nee, dat zie je zo, want alle vijven zijn op.

Nu naar dat hele lange product: $1 \times 2 \times 3 \times 4 \times \dots \times \dots \times 98 \times 99 \times 100$. Moet ik dat helemaal uitschrijven? Nee, ik doe het alleen met denken. Ik kijk eerst naar alle factoren 5, want daar kan ik tienenvallen mee maken en er zijn vast meer factoren 2. Hoe ik dat weet? De factoren 2 komen om de twee voor, die van 5 om de vijf.

$\dots \times 5 \times \dots \times 10 \times \dots \times 15 \times \dots \times 20 \dots 25 \dots 30 \dots$ stop maar, ik zie het al, het zijn er 20. Maar wacht eens even, er zitten nog meer vijven in: $25 = 5 \times 5$, $50 = 2 \times 25 = 2 \times 5 \times 5$, $75 = 3 \times 5 \times 5$ en 100 heeft zelf al 2 nullen. Totaal aantal factoren 5 is dus $20 + 4 = 24$ (van 100 hadden we al een nul bij die 24 meegerekend). En nu kunnen we zeggen dat het product $1 \times 2 \times 3 \times 4 \times \dots \times \dots \times 98 \times 99 \times 100$ op 24 nullen eindigt.

6 Een wonderlijke kermis

Toen Jan met nog maar 7 euro naar huis ging dacht hij aan al die verkwistingen, temeer omdat de waarzegster hem had gewaarschuwd voor een lichtzinnig leven. Hoe was hij dat geld ook allemaal kwijtgeraakt? Daarom riep Jan de hele geschiedenis weer op, maar nu van achteren naar voren.

Daar gaat-ie:

Laatste uitgave: 3 euro voor een cola; daarvòòr had Jan nog 10 euro.

De waarzegster vroeg $\frac{1}{3}$ van het geld dat Jan nog in zijn bezit had. Dat is precies de helft van 10 euro, omdat $\frac{1}{3}$ van 15 gelijk is aan 5; de rest (10 euro) is $\frac{2}{3}$. Dit verhaal met andere getallen wordt een paar keer herhaald. Een cola voor 3 euro; daarvòòr had Jan 18 euro.

Het spookhuis kostte hem het derde deel van het overgebleven zakgeld. $\frac{2}{3}$ Deel is 18, dan is $\frac{1}{3}$ gelijk aan 9, de kosten van het spookhuis. Voordat Jan naar het spookhuis ging had hij dus nog 27 euro. Een cola voor 3 euro, daarvòòr had Jan 30 euro.

Kun je nu zeggen wat hem de botsautootjes hebben gekost? Ja, de helft van 30 is 15 euro. Daarvòòr had hij 45 euro op zak. Een cola voor 3 euro, daarvòòr had Jan dus 48 euro.

Het eerste evenement van de kermis, het reuzenrad kostte maar liefst 24 euro (de helft van 48).

Dus begon Jan met $48 + 24 = 72$ euro.

7 Handtekeningen

86 Kilo is het gewicht van een volwassen man, en zeker geen lichtgewicht! Weet je dat bepaalde kranten op zaterdag bijna een kilo wegen? En dat de krantenloper eigenlijk niet meer dan 17 à 18 van die kranten mag rondbrengen in één keer?

Handtekeningen worden op papier verzameld. Meestal ter grootte van een A4-tje (21 bij 29,7 cm). Op een A4 gaan ongeveer 20 handtekeningen. En hoeveel weegt zo'n papiertje? Een pak kopieerpapier van 500 velletjes weegt 2500 gram en dat is 2,5 kg. Daar gaan $500 \times 20 = 10000$ handtekeningen op. $86 \text{ kg} = 34,4 \times 2,5 \text{ kg}$. Nou, reken maar uit: $34,4 \times 10000 = 344.000$ handtekeningen. Er is een andere manier: een pak van 500 velletjes 80 grams papier betekent dat elke vierkante meter van dat papier 80 gram weegt. Er gaan 16 A4-tjes in een m^2 . En 500 gedeeld door 16 is $31,25 \text{ m}^2$. Enzovoort.

8 Nederlanders

Als alle Nederlanders elkaar een hand geven, dan zijn ze daar erg lang mee bezig. Natuurlijk gaan ze in een rij staan en dan geeft iedereen alleen zijn of haar linker- en rechterbuurman of

-buurvrouw een hand. Natuurlijk kun je misschien ook uitrekenen hoe lang het zal duren als alle Nederlanders elkaar een hand gaan geven.

Misschien heb je wel eens dat beroemde plaatje gezien van Leonardo da Vinci met een blote man met beide armen uitgespreid. Op dat plaatje kun je zien dat de lengte van een mens gelijk is aan de afstand tussen zijn uitgespreide handen.

Een man is gemiddeld 182 centimeter lang maar vrouwen zijn kleiner, misschien 168 centimeter en kinderen zijn nog weer kleiner. De Nederlandse mannen, vrouwen, grote en kleine mensen en kinderen hebben verschillende lengtes. Het meten van elk van die 16 miljoen Nederlanders zou wel erg lang duren! Als je 3 minuten nodig hebt om één Nederlander te meten, dan duurt dat wel $16.000.000 \times 3$ minuten. Dat is 48.000.000 minuten. $48.000.000 : 60$, dat is 800.000 uur en $800.000 : 24 = 33.333,333$ dagen en dat is 91,324201 jaar. Zo oud word je vast niet, want je bent nu al 10, 11 of misschien 12 jaar, dan moet je dus ouder dan 100 jaar worden!

Toch nog even verder denken. Stel dat de gemiddelde lengte van de Nederlanders 1,60 meter is. Als ze in een lange rij staan en elkaar een hand geven, dan moet je daar de lengte van hun handen nog van aftrekken, want die handen grijpen in elkaar. Laten we 1,50 m. als gemiddelde afstand nemen. $16.000.000 \times 1,50 \text{ m} = 24.000.000$ meter. Dat is 24.000 kilometer. Dat is een stuk minder dan de lengte van de evenaar, want die is 40.000 km lang. Hé, hoe zouden ze eigenlijk de lengte van de evenaar gemeten hebben?

9 Som en product

Je zoekt paren getallen waarvan het product deelbaar is door de som. Je kunt proberen een aantal paren te vinden door zomaar wat getallen in te vullen. Je kunt ook proberen een bepaalde regelmaat te ontdekken. Paren die bij de getallen 3, 4 en 5 horen zijn:

3 en 6

de som is 9, het product is 18

$$18 : 9 = 2$$

4 en 12

de som is 16, het product is 48

$$48 : 16 = 3$$

5 en 20

de som is 25, het product is 100

$$100 : 25 = 4$$

De regelmaat die er lijkt te zijn is de volgende: als je de uitkomst van het product gedeeld door de som neemt, is die steeds 1 lager dan het kleinste van de twee getallen uit het oorspronkelijke paar. Bijvoorbeeld 3 en 2 of 4 en 3.

Als je uitkomst van het product gedeeld door de som neemt en die vermenigvuldigt met het kleinste van de twee getallen uit het oorspronkelijke paar, dan krijg je het grootste van de twee getallen uit het oorspronkelijke paar. Bijvoorbeeld $2 \times 3 = 6$ of $3 \times 4 = 12$.

Als je dat in een tabel zet voor de getallen 3 tot en met 10 levert dat het volgende op:

kleinste getal	grootste getal	product	som	product / som
3	6	18	9	2
4	12	48	16	3
5	20	100	25	4
6	30	180	36	5
7	42	294	49	6
8	56	448	64	7
9	72	648	81	8
10	90	900	100	9

De gevonden regelmaat blijkt inderdaad voor alle getallenparen van 3 tot en met 10 op te gaan!

Deze mooie oplossing verdient een vervolg:

kleinste getal	grootste getal	product	som	product / som
3	6	18	9	2
4	12	48	16	3
5	20	100	25	4

Wat is hier precies aan de hand?

3	x	6	4	x	12	5	x	20
3	+	6	4	+	12	5	+	20
3	+	2x3	4	+	3x4	5	+	4x5
$= (3 - 1) \times 3$			$= (4 - 1) \times 4$			$= (5 - 1) \times 5$		

De som wordt op deze manier altijd $x + (x - 1)x = x \cdot x = x^2$, terwijl de teller steeds deelbaar is door x^2 . Je kiest de getallen zo, dat de noemer (de som van beide getallen) een kwadraat wordt.

We kunnen nog iets verder gaan: neem bijvoorbeeld de getallen 10 en 15. Hun product (150) is deelbaar door hun som (25). Nu is $15 = 17 \times 10$ en 17 is 1 minder dan 27 en 10 is een veelvoud van 27. Dat blijkt het criterium te zijn: de factor moet met 1 vermeerderd een 'deler' zijn van het eerste getal.

Algemeen: kies je als begingetal k , dan moet het tweede getal $(p-1) \cdot k$ zijn, waarbij k/p een geheel getal is.

Want de som moet een product van p en k zijn: $k + (p-1) \cdot k = p \cdot k$

	kleinste getal	grootste getal	product	som	product / som
algemeen	k	$(p-1) \cdot k$	$(p-1) \cdot k^2$	$k + (p-1) \cdot k = p \cdot k$	$(p-1) \cdot k/p$
voorbeeld 1	12	$(6-1) \cdot 12 = 5 \cdot 12 = 60$	720	72	10
voorbeeld 2	15	$4 \cdot 15 = 60$	900	75	12
voorbeeld 3	17	127,5	2167,5	144,5	15

10 Egyptisch vermenigvuldigen

Ik snap het rijtje: 125, 2×125 , 4×125 , 8×125 , 12×125 . Tot 8×125 is er steeds verdubbeld. Dat moet net zolang tot je 12×125 kunt maken, in dit geval door 4×125 en 8×125 op te tellen. (samen 12×125). Nu probeer ik 27×134 op dezelfde manier te doen.

1	134
2	268
4	526
8	1072
16	2144
32	4288

Nu kan ik 37 maken: $37 = 32 + 4 + 1$. Dus optellen $134 + 526 + 4288 = 4958$.

11 Kwadraat x priem

De laatste priemjaartallen van de twintigste eeuw zijn 1997 en 1999. Omdat $1 (= 1 \times 1)$ een kwadraat is voldoen beide jaartallen aan de eis: kwadraat x priem. Maar om 1999 te ontbinden in 1×1999 is ook zo wat. Laten we ze daarom maar niet meetellen.

$2000 = 40 \times 50$. Daar ga je vanuit. Begin met een aantal kwadraten en vermenigvuldig die met een priemgetal, zodat het antwoord dicht bij 2000 ligt. Zo krijg je bijvoorbeeld $49 \times 41 = 2009$ en $25 \times 79 = 1975$.

2000 Zelf is gelijk aan 400×5 , kwadraat (20×20) maal priem. Dus het eerste op 1996 volgende jaartal is in dit geval 2000. Wat was het laatste jaartal voor 1996? Misschien 1975? Hoe kun je dat zeker weten zonder alleen maar wat te proberen?

Nu wordt het echt wiskunde. We gaan systematisch op onderzoek. De eerste priemgetallen zijn 2, 3, 5, 7 enzovoort. Deel 2000 door zo'n priemgetal. Bijvoorbeeld $2000 : 7 = 285,71\dots$ Nu zoek je het dichtstbijzijnde kwadraat dat kleiner is dan 285,17 (want anders kom je boven 2000 uit!). Dan kom je bij 256 (16×16) en $256 \times 7 = 1792$. Je moet kennelijk nog een poosje doorgaan. Na een tijdje kom je bij het getal 31.

$$2000 : 31 = 64,5161$$

$$31 \times 64 = 1984.$$

12 Palindroom

Eerst maar eens een eenvoudige bedenken: 6-6-66. Zo zijn er nog acht andere, van 1-1-11 tot 9-9-99. Er zijn er meer, zoals je zag: 6-9-96. Het eerste en tweede getal zijn kleiner dan 10. Na 1-1-11 komt 2-1-12 tot en met 9-1-19. Het volgende rijtje is 1-2-21 tot en met 9-2-29 en het laatste rijtje is 1-9-91 tot en met 9-9-99. Dat zijn er samen $9 \times 9 = 81$.

Maar hoe zit het met bijvoorbeeld 12-11-21? Ook symmetrisch en dus een palindroom van 6 cijfers. Het middelste getal (dat van de maand) kan in dit geval alleen maar 11 zijn, maar met de dagen en jaren kunnen we nog wel het een en ander: 11-11-11 en 12-11-21 en 13-11-31 tot en met 19-11-91. Dat zijn er weer 9!

21-11-12 en 22-11-22 en 23-11-32 tot en met 29-11-92 en 30-11-03. Dat zijn er 10. Nu hebben we al $81 + 9 + 10 = 100$. Een mooi getal! Er is er echter nog een: 10-11-01. Dat maakt 101.

Zijn er ook 5-cijferige? Ja, bijvoorbeeld: 12-1-21? Is dat geen mooie gelegenheid om dat verder zelf uit te zoeken?

In deze eeuw hebben we 20 februari 2002 gehad, dat kan je schrijven als 20-02-2002, een palindroom-datum van 8 cijfers! En denk je eens in als je behalve een palindroom-datum ook nog een palindroom-tijdstip mocht toevoegen, dan had je om 2 minuten over acht 's avonds 20-02-2002 20.02 gehad! Omdat 30 februari niet bestaat duurt het wel een tijdje voordat we weer zo'n 8-cijferige palindroom-datum krijgen. Weet jij wanneer dat is?

13 Maak de sommen af

Met zomaar wat getallen invullen en de goede getallen uitzoeken, lukt het wel. Al die vier onbekende getallen opgeteld levert 29 op, de uitkomst van zowel $12 + 17$ als van $15 + 14$. Probeer eens welke vier getallen samen 29 opleveren:

$$1 + 2 + 4 + 22$$

$$1 + 3 + 4 + 21$$

Nee, dat schiet niet op. Teveel werk en de getallen 21 en 22 zijn veel te groot. Dat kunnen we beter doen. Er moeten vier getallen worden ingevuld die samen 29 opleveren, dat is gemiddeld iets meer dan 7.

Als je in de linker bovenhoek 7 schrijft, dan moet 5 er naast staan. Samen 12. En in de linker onderhoek 8, want de som moet 15 zijn. Daarnaast moet 9 staan, want je moet 17 krijgen.

$$\begin{array}{rcl} 7 & + & 5 & = & 12 \\ + & & + & & \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} 8 & + & 9 & = & 17 \\ = & & = & & \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} 15 & & 14 \end{array}$$

Dat is meteen de goede oplossing. Zijn er nog meer?

Met 6 in de linker bovenhoek:

$$\begin{array}{r} 6 \quad + \quad 6 \quad = \quad 12 \\ + \quad \quad + \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 9 \quad + \quad 8 \quad = \quad 17 \\ = \quad \quad = \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 15 \quad \quad 14 \end{array}$$

Met 5 in de linker bovenhoek:

$$\begin{array}{r} 5 \quad + \quad 7 \quad = \quad 12 \\ + \quad \quad + \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1 \\ 0 \end{array} + 7 = 17$$

$$\begin{array}{r} = \quad \quad = \\ 15 \quad \quad 14 \end{array}$$

Met 4 in de linker bovenhoek:

$$\begin{array}{r} 4 \quad + \quad 8 \quad = \quad 12 \\ + \quad \quad + \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1 \\ 1 \end{array} + 6 = 17$$

$$\begin{array}{r} = \quad \quad = \\ 15 \quad \quad 14 \end{array}$$

Met 3 in de linker bovenhoek:

$$\begin{array}{r} 3 \quad + \quad 9 \quad = \quad 12 \\ + \quad \quad + \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1 \\ 2 \end{array} + 5 = 17$$

$$\begin{array}{r} = \quad \quad = \\ 15 \quad \quad 14 \end{array}$$

Met 2 in de linker bovenhoek:

$$2 + 10 = 12$$

$$+ +$$

$$13 + 4 = 17$$

$$= =$$

$$15 \quad 14$$

Met 1 in de linker bovenhoek:

$$1 + 11 = 12$$

$$+ +$$

$$14 + 3 = 17$$

$$= =$$

$$15 \quad 14$$

En met 0 in de linker bovenhoek lukt het ook:

$$0 + 12 = 12$$

$$+ +$$

$$15 + 2 = 17$$

$$= =$$

$$15 \quad 14$$

14 Rekentruc met dobbelstenen

Als je bijvoorbeeld een 5 en een 4 gooit dan doe je:

$$5 \times 2 = 10$$

$$10 + 5 = 15$$

$$15 \times 5 = 75$$

$$75 + 4 = 79$$

$$79 - 25 = 54.$$

Dat getal bestaat weer uit de twee dobbelsteenworpen.

Klopt het altijd? Het klopt inderdaad altijd. Je gooit met twee dobbelstenen, dobbelsteen A en dobbelsteen B.

Je neemt twee maal A en je telt daar 5 bij op.

Dit geheel vermenigvuldig je met 5.

Je krijgt dan 10 maal A en je telt daar 25 bij op.

Daar tel je B bij op en je trekt er weer 25 van af.

Uiteindelijk hou je dan 10 maal A en 1 maal B over.

Dat zijn naast elkaar precies A en B! Kijk zelf maar!

15 De slimme wijndief

Vergelijk eerst de twee standen van de flessen. Per rij zijn het er inderdaad elf, maar na de diefstal zijn er in totaal vier flessen minder. Hoe zit dat?

Stap 1: De dief pakt uit de bovenste rij twee van de negen flessen weg, en zet die op de hoeken.

Dat ziet er zo uit: 2 - 7 - 2.

Stap 2: De dief doet hetzelfde in de onderste rij.

Stap 3: De dief steelt vier flessen uit de twee overige rijen. Nu zie je dit:

2	7	2
7		7
2	7	2

Zo kan de flessendief natuurlijk nog even door gaan:

Stap 1: De dief pakt uit de bovenste rij twee van de zeven flessen weg en zet die op de hoeken.

Dan zie je: 3 - 5 - 3.

Stap 2: Hij doet hetzelfde in de onderste rij.

Stap 3: Hij steelt nog vier flessen uit de twee overige rijen. Nu ontstaat de volgende stand:

3	5	3
5		5
3	5	3

Daarna stelt de dief nog een keer flessen en dat ziet er zo uit:

4	3	4
3		3
4	3	4

De flessendief kan vervolgens nog één keer flessen wegnemen:

5	1	5
1		1
5	1	5

Nu kan hij niet verder. De dief kan immers niet meer twee flessen uit het midden van een rij weghalen om ze op de hoekpunten te zetten. Wat is nu precies de slimmigheid? Bekijk nog even de vijf standen van de flessen op een rij:

1 - 9 - 1

2 - 7 - 2

3 - 5 - 3

4 - 3 - 4

5 - 1 - 5

Steeds samen elf op een rij, maar in totaal vier flessen minder dan voor iedere diefstal. Dat totaal zie je niet, als je alleen maar naar de rijtjes kijkt. Dat was de truc van de wijndief! Het zit 'm in die flessen op de hoekpunten. Als je het totaal aantal flessen telt door vier keer een rijtje te nemen (fout dus), dan tel je de flessen op de hoekpunten dubbel. Neem maar de laatste stand: 5 - 1 - 5. Op elke rij staan er elf en $4 \times 11 = 44$, anders geteld: $8 \times 5 + 4 \times 1 = 44$. Maar er zijn maar (als je goed telt $4 \times 5 + 4 \times 1$) 24 flessen. Dat zijn er $4 \times 5 = 20$ minder.

16 1, 2, 3 en 4

$$(4 - 3) + (2 - 1) = 2$$

$$(4 : 2) + (2 - 1) = 3$$

$$4 + 1 + 2 - 3 = 4$$

$$(4 + 3) \times 1 - 2 = 5$$

En zo verder.

17 Hoe kan dat?

Je nam bijvoorbeeld het getal 25 in gedachten. Verdubbeld is dat 50, plus 20 is 70, gedeeld door 2 is 35. 't Klopt: $35 = 25 + 10$. Dit klopt voor elk getal, ook als je bijvoorbeeld met 1 begint: 1 verdubbeld wordt 2, $2 + 20 = 22$ en $22 : 2 = 11$, dat is $10 + 1$.

Nu weet je nog niet zeker of het voor *alle* getallen zo is. Neem maar eens 'alle getallen' in gedachten (!). Voor het gemak noemen we 'alle getallen' hier even 'G'. G verdubbeld is 2G, $2G + 20$; $1G + 10$, dat is 10 meer dan G. Nu weet je het zeker!

18 Vierkant

Voor de oplossing mag je je rekenmachine gebruiken. Mark en Nora hebben allebei een beetje gelijk, want $1,4 \times 1,4 = 1,96$ en $1,5 \times 1,5 = 2,25$. Marks' uitkomst is te klein, maar Nora's uitkomst is te groot. Mark zit er wel dichterbij, want 1,96 ligt dichterbij 2 dan 2,25. Een betere uitkomst is misschien 1,44. Op je rekenmachine krijg je: $1,44 \times 1,44 = 2,0736$. 1,44 is dus ook te groot, maar wel beter dan de uitkomst van Nora.

Midden tussen 1,4 en 1,44 ligt 1,42. Probeer maar: $1,42 \times 1,42 = 2,0164$. Weer dichterbij 2, maar nog te groot. Dan 1,41 proberen, dat ligt precies tussen 1,4 en 1,42. $1,41 \times 1,41 = 1,9881$. Weer te klein!

Dan ligt de gezochte uitkomst dus ergens tussen 1,41 en 1,42. Precies in het midden ligt 1,415.

Probeer het maar weer, gelukkig dat je een rekenmachientje hebt!

$1,415 \times 1,415 = 2,002225$. Weer iets te groot, maar we komen steeds dichterbij 2.

Midden tussen 1,41 en 1,415 ligt 1,4125. Weer proberen: $1,4125 \times 1,4125 = 1,9951563$. Zo kun je nog wel even doorgaan...

Met de worteltoets gaat het natuurlijk gemakkelijk: $\sqrt{2} = 1,4142136$.

Dat klopt, want als je na $\sqrt{2} = 1,4142136$ de kwadraatknop indrukt krijg je weer 2. Toch vreemd, want als je het getal 1,4142136 intoetst en dan kwadrateert, dan komt er 2,0000001. En dat is ook niet helemaal goed...

19 A4-papier

Op het pak A4-papier, dat bij de kopieermachine ligt, staat dat het 80 grams papier is. Weet je wat dat betekent? Elke vierkante meter (m^2) van dat papier weegt 80 gram. Je weet de afmetingen van een velletje A4: 29,7 cm x 21,1 cm (dat staat in de Info). En weet je toevallig ook nog dat twee velletjes A4, met de lange kant tegen elkaar, samen een velletje A3 vormen. En als je twee velletjes A3 zo tegen elkaar legt, krijg je A2, daarna A1 en tenslotte A0. Hé, zou A0 misschien een m^2 zijn? De afmetingen van een vel A0 zijn 2 x die van A1, dus 4 x die van A2, 8 x die van A3 en 16 x die van A4. Nu kan je wat uitrekenen: $16 \times 29,7 = 475,2$ en $16 \times 21,1 = 337,6$. De oppervlakte van A0 is dan $475,2 \times 337,6 = 10026,72 \text{ cm}^2$. Niet gek, want $10026,72 \text{ cm}^2 = 1,002672 \text{ m}^2$.

20 Telefoonnummers

Als het eerste cijfer geen nul mag zijn, dan lopen de mogelijke telefoonnummers op Sint Maarten van 10000 tot 99999, dat zijn er $99\,999 - 9\,999 = 90\,000$ (mag het eerste cijfer wel een nul zijn, dan komen er nog 10 000 bij, namelijk de nummers 00000 tot en met 09999, het totaal aantal mogelijke nummers is dan 100 000).

Hoeveel nummers zijn er in Nederland mogelijk met als eerste cijfer een 0 en met het tweede cijfer geen 0? Van 010-0000000 tot en met 099-9999999, totaal $999\,999\,999 - 99\,999\,999 = 900\,000\,000$ mogelijke nummers. Je kan dit ook anders zeggen:

1 mogelijkheid voor het eerste cijfer,
9 mogelijkheden voor het tweede cijfer,
10 mogelijkheden voor het derde tot en met tiende cijfer,
dus totaal 9×10^8 mogelijkheden.

21 Vierkant verdelen

Na één keer verdelen krijg je twee rechthoeken, na twee keer verdelen vier vierkanten. Bij elke *even* verdeling krijg je vierkanten. Na vier keer 16; na zes keer 64; na acht keer 256 vierkanten. Die zijn dus meer dan 100 keer zo klein als het vierkant waarmee je begon.

22 Magisch vierkant

Als je de cijfers van 1 tot en met 9 op kaartjes zet, dan kun je in het vierkant gemakkelijk met de cijfers schuiven. Eerst maar eens wat proberen. Je ziet dat er veel mogelijkheden zijn.

Je weet dat de som van de cijfers in de drie rijen gelijk moet zijn. Als je alle cijfers bij elkaar optelt, krijg je 45. Dan moet in elke rij, maar ook in elke kolom 15 de som van de cijfers zijn, want $3 \times 15 = 45$.

Je moet dus 15 opdelen in drie verschillende cijfers en 15 als uitkomst krijgen van 6 verschillende optelsommen (drie rijen, drie kolommen en twee diagonalen).

Je kunt het getal 15 op acht verschillende manieren als som van drie cijfers krijgen:

$$\begin{array}{llll} 1 + 5 + 9 & 2 + 4 + 9 & 3 + 4 + 8 & 4 + 5 + 8 \\ 1 + 6 + 8 & 2 + 5 + 8 & 3 + 5 + 7 & \\ & 2 + 6 + 7 & & \end{array}$$

Dit is dus het aantal verschillende sommen dat je in het vierkant moet invullen. Het cijfer 5 komt in vier van die sommen voor, de cijfers 2, 4, 6 en 8 in drie verschillende sommen. De cijfers 1, 3, 7 en 9 in twee verschillende sommen. Het invullen van het magisch vierkant moet nu een fluitje van een cent zijn.

Je kunt ook anders te werk gaan. Zo kan je door de manier van vragen al beredeneren dat 5 in het middelste vakje moet staan. Het volgt eigenlijk ook al uit wat hierboven staat: 'het cijfer 5 komt in vier van die sommen voor'. Dat kan namelijk alleen maar als 5 in het midden staat. En wat weet je van de getallen 2, 4, 6 en 8 als die in drie sommen moeten staan? Ja, dat betekent een plaatsje bij een hoekpunt. Enzovoort.

23 Een vreemde optelsom

Let goed op, want dit is een ingewikkelde oplossing. We gaan eerst kijken wat we snel kunnen beredeneren. Voor de rechter rij geldt: $Y + N + N = Y$. N is dus 0 of 5. Verder geldt voor de rij links daarvan: $T + E + E = T$. Als $N = 5$, dan hou je bij de optelling $Y + N + N$ een tiental over, dat je naar de rij met tientallen moet overbrengen. Dan is echter $T + E + E$ geen T meer. Conclusie: $N = 0$. Dan moet E dus wel 5 zijn.

Als je $E = 5$ invult, dan wordt $T + 5 + 5 = T + 10$ tientallen.

Je moet dus 1 honderdtal overbrengen naar de rij met honderdtallen. Je krijgt dan: $1 + R + T + T = X$. Verder is $F + 1 = S$, omdat O maximaal 9 duizendtallen kan zijn. Je kunt dus hoogstens 1 tienduizendtal overbrengen naar de rij met tienduizendtallen.

$1 + R + T + T$ is maximaal $1 + 8 + 9 + 9 = 27$.

Je kunt dus hoogstens 2 duizendtallen naar de rij met O overbrengen.

Als $O = 8$ duizendtallen zou zijn, dan zou $O + 2 + 10$ zijn.

O is daarom minstens 8 duizendtallen, omdat je één tienduizendtal moet overhouden om over te brengen naar F . Dat zou betekenen dat $I = 0$ zou zijn. Dat kan niet, omdat $N = 0$. Dat houdt in dat $O = 9$. Als $O = 9$, dan geldt: $9 + 2 = 11$ duizendtallen. $I = 1$ en je brengt 1 tienduizendtal over naar F .

In het rijtje $1 + R + T + T$ moet je twee duizendtallen overhouden om over te brengen naar de O . T moet minimaal 6 zijn. Als $T = 6$ zou zijn dan zou de uitkomst $1 + 8 + 6 + 6 = 21$ of $1 + 7 + 6 + 6 = 20$ zijn. Dan zou $I = 0$ of $I = 1$ zijn. Dat kan allebei niet. Als $T = 7$ dan zou de uitkomst $1 + 6 + 7 + 7 = 21$ of $1 + 8 + 7 + 7 = 23$ zijn. Dat laatste zou wel kunnen. Als je invult $T = 7$ en $R = 8$ dan staat er:

$$\begin{array}{rcccc} F & 9 & 8 & 7 & Y \\ & & 7 & 5 & 0 \\ & & 7 & 5 & 0 & + \\ \hline S & 1 & 3 & 7 & Y \end{array}$$

Je hebt nu gebruikt de getallen: 1, 3, 5, 7, 8 en 9. F en S moeten 2 opeenvolgende getallen zijn. Die zijn niet meer over. $T = 7$ klopt dus niet.

Als $T = 8$ dan zou de uitkomst $1 + 4 + 8 + 8 = 21$ of $1 + 6 + 8 + 8 = 23$ of $1 + 7 + 8 + 8 = 24$ kunnen zijn. De eerste oplossing kan niet, omdat X geen 1 kan zijn. De tweede oplossing kan ook niet, omdat na invulling in de oorspronkelijke som weer geen twee opeenvolgende getallen voor F en S overblijven. De derde oplossing kan wel. Invullen in de oorspronkelijke som levert op:

$$\begin{array}{rcccc} F & 9 & 7 & 8 & Y \\ & & 8 & 5 & 0 \\ & & 8 & 5 & 0 & + \\ \hline S & 1 & 4 & 8 & Y \end{array}$$

Als enige paar opeenvolgende getallen zijn overgebleven 2 en 3. Dus $F = 2$ en $S = 3$. Het enige getal dat voor Y overblijft is 4.

24 Delen door 7 op je rekenmachine

Als je deelt $10 : 4 = 2,5$ dan moet $4 \times 2,5 = 10$ zijn. Dat klopt. Als je deelt $1 : 7 = 0,1428571$ dan moet $7 \times 0,1428571 = 1$ zijn. Dat klopt niet, want je rekenmachine rekent uit 0,9999997. Dat is dus eigenlijk te weinig. Om er wel precies 1 uit te krijgen, moet er dus meer zijn dan het getal in het venster van je rekenmachine. Een iets groter getal. Het zou misschien 0,1428572 kunnen zijn, maar dat is zeer onwaarschijnlijk, want dan had de rekenmachine dat getal wel laten zien. Als je het toch even probeert, zie je $7 \times 0,1428572 = 1,0000004$. Inderdaad teveel. Bestaat er een getal dat tussen 0,1428571 en 0,1428572 ligt?

Hé, denk eens aan die staartdeling, die maar steeds doorgaat. Probeer maar, dan kom je ook op het idee om te nemen 0,1428571428571... enzovoort. Daarom wordt er in de opgave natuurlijk gevraagd om iets uit te vinden om het achtste cijfer achter de komma te laten zien. Je denkt nu misschien dat het een 4 moet zijn? Zo kan je het beredeneren: je moet alle cijfers een plaats naar links laten schuiven. Bijvoorbeeld: 1,428571. Hoe kun je dat doen? Door met 10 te vermenigvuldigen, kijk maar: $10 \times 0,1428571 = 1,428571$. Neem in plaats van $1 : 7$ nu maar $10 : 7 = 1,4285714$. Aha, daar is de 4 als achtste cijfer achter de komma, want nu kun je zeggen $1 : 7 = 0,14285714$.

Nu $1 : 0$; inderdaad, geen antwoord in het venster, maar 'error'. Blijkbaar kan het rekenmachientje dit niet uitrekenen. Het snapt zeker niet wat met $1 : 0$ bedoeld wordt. Snap jij het eigenlijk? $10 : 2 = 5$, want $5 \times 2 = 10$. En dus op dezelfde manier $1 : 0 =$ iets, want iets $\times 0 = 1$? Dat kan dus niet, want als je met 0 vermenigvuldigt, komt er 0 uit! Flauwekul dus, om het aan je rekenmachine te vragen.

25 De snelweg naar 0

Delen gaat het snelst. Wat is het grootste getal onder 100 waardoor je 75456 kunt delen? De som van de cijfers is 27, dus 75456 is deelbaar door 9. En de laatste drie cijfers vormen het getal 456, dus is 75456 deelbaar door 8. Dus is 75456 ook deelbaar door 72 (want $9 \times 8 = 72$). $75456 : 72 = 1048$. Je ziet aan de laatste twee cijfers dat ook 1048 weer deelbaar is door 8. $1048 : 8 = 131$. Dat is een priemgetal, want het is niet deelbaar door 3, 5, 7 en 11. Je moet nu dus eerst een getal van 131 aftrekken. Dan wordt een snelle weg naar 0:

$$75456 : 72 \rightarrow 1048 : 8 \rightarrow 131 - 99 \rightarrow 32 - 32 = 0$$

Klaar! In vier stappen. Kan het nog sneller?

26 Van kommagetal naar gewone breuk

$\frac{1}{9}$ is $\frac{1}{3}$ deel van $\frac{1}{3}$, dus ook $\frac{1}{3}$ deel van 0,333333. $\frac{1}{9}$ is dus 0,111111. Bij het kommagetal 0,555555 hoort dus de breuk $5 \times \frac{1}{9} = \frac{5}{9}$. Bij 0,25 hoort $\frac{1}{4}$. Bij 0,125 hoort $\frac{1}{8}$. Bij 0,625 hoort $5 \times \frac{1}{8} = \frac{5}{8}$. Bij 0,020408 hoort $\frac{2}{98}$, want $\frac{1}{98} = 0,010204$.

Je kunt altijd controleren of je het goed hebt door met de omgekeerde breuk te vermenigvuldigen. Als de uitkomst dan 1 is, dan is het goed. Als je het door een rekenmachientje laat doen, moet je oppassen. Kijk maar naar probleem 24.

27 De rij afmaken

Waarschijnlijk kijk je eerst of er steeds een bepaald getal wordt opgeteld. Dan zie je dat er steeds *meer* wordt opgeteld. Misschien zit daar wel een regelmaat in.

+ 1, + 3, + 6, + 10, + 15, ... Kijk eens goed welke regelmaat daar in zit:

+ 2, + 3, + 4, + 5, ... Steeds één meer!

Nu kun je de rij aanvullen:

+2	+3	+4	+5	+6	+7	+8
1	3	6	10	15	$15 + 6 = 21$	$21 + 7 = 28$
1	4	10	20	35	$35 + 21 = 56$	$56 + 28 = 84$

Volgende opgave: er komt bij 23, 69, 207. Zie je de regelmaat:

23

3×23

3×69

nu kan je verder met 3×207 , enzovoort

7	30	99	306	927	2790
23	69	207	621	1863	5589

28 Achtland

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 10, 11, 12, ..., 17, 20, 21, ...

$4 + 7 = 13$ (vier plus zeven is acht-drie)

$7 - 4 = 3$, $10 - 3 = 5$

Tafels: bijvoorbeeld de tafel van 5

$1 \times 5 = 5$

$2 \times 5 = 12$ (acht-twee)

$3 \times 5 = 17$

$4 \times 5 = 24$ (wat is de uitspraak van dit getal?)

$5 \times 5 = 31$

enzovoorts.

29 Millennium

Voorbeeld: ik ben jarig op 20 mei. Hoeveel seconden is het van precies 0.00 uur op 20 mei 1999 tot precies 0.00 uur op 1 januari 2000? Eerst maar eens kijken hoeveel dagen het zijn. Ik spring van 20 mei naar 31 mei, dat zijn al vast 11 dagen. Maar pas op, waar kom ik terecht met 11 dagen als ik begin op 0.00 uur op 20 mei? Op 31 mei 0.00 uur! Als ik mei helemaal uit wil, dus tot 1 juni 0.00 uur, dan zijn het 12 volle dagen. Van 1 juni (0.00 uur) naar 1 juli, dat zijn 30 dagen, tot 1 augustus nog eens 31, tot 1 september weer 31 dagen, 1 oktober 30, 1 november 31, 1 december 30 en 1 januari 2000 (0.00 uur) weer 31 dagen. Samen 226 dagen. Iedere dag heeft 24 uren van 60 minuten met elk 60 seconden, dat is $226 \times 24 \times 60 \times 60$. Het totaal aantal seconden is 19 526 400.

30 Delen door 9

Het klopt niet altijd, je ziet dat het soms een beetje anders is. Bijvoorbeeld $38 : 9 = 4$ rest 2, terwijl de som van de cijfers $3 + 8 = 11$. Maar... voor 11 geldt $11 : 9 = 1$ rest 2. Er is dus een mouw aan te passen! Is de som van de cijfers meer dan 9, neem dan nog een keer de som van de cijfers.

Bijvoorbeeld $537 \rightarrow 5 + 3 + 7 = 15 \rightarrow 1 + 5 = 6$ en inderdaad: $537 : 9 = 59$ rest 6 (je kunt dat ook zo schrijven: $537 = 59 \times 9 + 6$).

Een getal en de som van de cijfers van dat getal hebben dezelfde rest, bij deling door 9. Daar gaat het eigenlijk om. Belangrijk is ook dat alle getallen 1, 10, 100, 1000, rest 1 hebben en verder:

- als je getallen optelt dan tellen de resten ook op
- als je een getal met 2, 3, 4, 5, ... 8 keer vermenigvuldigt, dan wordt de rest ook 2, 3, 4, 5, ... 8 keer zo groot. Daarbij opgemerkt dat dit geldt zolang de uitkomst kleiner is dan 9, anders moet je er een 9-voud van aftrekken, zodat je weer iets krijgt wat kleiner is dan 9.

31 De tafel van 9 op je vingers

We keken eerst naar 7×9 . Strek je vingers en buig de zevende van links. Als je dan je vingers 'leest' zie je links zie 60 en rechts 3. Klopt, $7 \times 9 = 63$. Als je de hele tafel van 9 uitprobeert klopt het altijd. Maar kan je dat uitleggen zonder de hele tafel op je vingers na te kijken? Dat kan, want de tafel van 9 is iets heel bijzonders. De antwoorden kun je zo op een rij zetten:

09
18
27
36
45
54
63
72
81
90

Zie je wat zo bijzonder is? Het linker cijfer wordt steeds 1 meer, van het rechter cijfer gaat steeds 1 af. En samen zijn ze in alle gevallen 9. Je hebt tien vingers, je moet er steeds één ombuigen. Voor 1×9 is dat de pink van je linkerhand. Dan lees je af: 0 tientallen, 9 eenheden: $1 \times 9 = 9$. Klopt. Nu ga je een stapje verder, er komen dus 9 bij (2×9 is 9 meer dan 1×9). En $9 = 10 - 1$. Er komt dus 1 tiental bij en er gaat 1 eenheid af. Ofwel, de gebogen vinger schuift 1 op naar rechts: $0 \mid 9$ wordt $1 \mid 8$, enzovoort. Overtuigd

32 Priemgetallen

Je hebt natuurlijk al ontdekt dat er nog veel meer priemgetallen zijn dan 2, 3, 5, 7 en 11. Om alle priemgetallen kleiner dan 100 te vinden, moet je alle getallen vanaf 2 onderzoeken en nagaan of die getallen nog andere delers hebben dan 1 en zichzelf. Je ontdekt dan dat 48 geen priemgetal is, want 48 kun je niet alleen delen door 1 en 48, maar ook door 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16 en 24. Het getal 47 is wel een priemgetal, want andere delers dan 1 en 47 heeft 47 niet.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Een handig hulpmiddel waarmee snel alle priemgetallen kleiner dan 100 zijn te vinden, is het honderdveld, dat je hierboven ziet staan. Op dit honderdveld gaan we alle *niet-priemgetallen* wegstrepen. Te beginnen met het getal 1, want dit is geen priemgetal. Dat hebben mensen, lang geleden,

zo afgesproken. Het volgende getal, 2, streep je niet door, want dat is het eerste priemgetal. Maar alle tweevouden, 4 - 6 - 8 - 10 - 12 - 14, enzovoort tot en met 100 moet je wel doorstrepen, want die zijn deelbaar door 2 en dus geen priemgetallen. Daarna begin je opnieuw. Met 3 en de drievouden. Natuurlijk streep je 3 niet door. Dat is immers een priemgetal, maar natuurlijk wel alle drievouden te beginnen met 6. Als je daarmee klaar bent, zijn alle tweevouden en drievouden door-gestreept. Je ziet dat ook alle viervouden en zesvouden zijn doorgestreept. Die getallen heb je al doorgestreept omdat ze ook deelbaar zijn door 2 of 3.

Nu komen de vijfvouden vanaf 10 aan de beurt. Daarna alle zevenvouden vanaf 14.

Even kijken, zijn nu alle deelbare getallen kleiner dan 100 doorgestreept? Als je het goed hebt gedaan zijn de veelvouden van 11 ook al doorgestreept, want 22, 33, 44, 55, 66, 77, 88 en 99 hebben 2, 3, 5 of 7 als deler. Ook naar veelvouden van 13, 17 of 19 hoef je niet meer te kijken. De getallen die niet zijn doorgestreept, zijn alle priemgetallen kleiner dan 100. Als je het goed hebt gedaan, heb je 25 priemgetallen gevonden: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89 en 97.

Dat je alle even getallen kunt schrijven als som van twee priemgetallen is niet zo moeilijk. Gewoon proberen en wat rekenen. Sommige getallen zijn op verschillende manieren te schrijven als de som van twee priemgetallen. Bijvoorbeeld: $26 = 7 + 19$ en ook $3 + 23$. Het getal 30 is op drie manieren te schrijven als som van twee priemgetallen:

$$30 = 7 + 23$$

$$30 = 11 + 19$$

$$30 = 13 + 17$$

Kun je een even getal vinden dat je op nog meer manieren als som van twee priemgetallen kunt schrijven? Natuurlijk wil je ook weten of je *alle* even getallen kunt schrijven als som van twee priemgetallen. Dat is een lastig probleem, er zijn immers oneindig veel even getallen. Tot nu toe hebben knappe koppen nog nooit een even getal kunnen vinden dat niet als de som van twee priemgetallen is te schrijven. Maar niemand heeft nog kunnen bewijzen dat er niet een heel groot even getal bestaat waarbij dat niet lukt!

33 Breuken

Wat zijn gewone breuken groter dan $\frac{1}{25}$? Dat zijn alle breuken (we bedoelen die met een breukstreep, geen decimale breuken) met noemers (het onderste getal van de breuk) kleiner dan 26. Al die breuken met noemer 25 geven natuurlijk geen repeterende breuk, want je kunt er $\frac{100}{25}$ van maken.

Kijk bijvoorbeeld naar: $\frac{1}{25} = \frac{4}{100} = 0,04$ of $\frac{17}{25} = \frac{68}{100} = 0,68$ of $\frac{5}{25} = \frac{1}{5} = \frac{2}{10} = 0,2$.

Of een breuk repeterend is, heeft dus iets met die noemer te maken. Je zag net dat de breuk niet repeterend is als je van de noemer 10 of 100 kunt maken. Die breuken (groter dan $\frac{1}{25}$) kan je wel vinden. Neem maar alle breuken met noemer 20, 10 en 5. Bijvoorbeeld $\frac{1}{20} = \frac{5}{100} = 0,05$.

En $\frac{3}{5} = \frac{6}{10} = 0,6$ of $\frac{1}{4} = \frac{25}{100} = 0,25$ of (met noemer 8) $\frac{3}{8} = \frac{375}{1000} = 0,375$. Maar dan ook $\frac{1}{16}$, want die breuk is gelijk aan de helft van $\frac{1}{8}$. Wat is de helft van 0,375? Reken met 0,3750, dat is immers hetzelfde, de helft daarvan is 0,1875. Dat kan ook anders, namelijk door bij $\frac{1}{16}$ eraan te denken dat de noemer 16 moet veranderen in de noemer 10 000. Wat is $10\,000 : 16$? Precies, dat is 1875.

Wat overblijft zijn de noemers 3, 6, 7, 9, 11, 12, 13, 14, 15, 17, 18, 19, 21, 22, 23 en 24.

Er zijn nog wel wat uitzonderingen, want bijvoorbeeld de breuk $\frac{3}{6}$ is niet repeterend omdat die gelijk is aan $\frac{1}{2} = 0,5$. En zo is ook $\frac{3}{12}$ niet repeterend, want die kun je vereenvoudigen tot $\frac{1}{4}$.

Maar als een breuk *niet* vereenvoudigd kan worden en *wel* een van die noemers heeft, moet hij wel repeterend zijn. Probeer maar of je een tegenvoorbeeld kunt vinden? Of heb je dat niet nodig om overtuigd te worden?

34 Rekenmachine

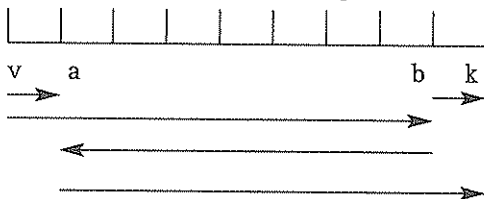
Annemiek heeft twee getallen op elkaar gedeeld, maar ze weet niet meer welke getallen. Er komt uit 7,7272727. Wat een mooie regelmaat! Alleen de 7 voor de komma loopt wat uit de pas. Die laat je gewoon even weg, dan staat er 0,7272727. Waarschijnlijk heeft de rekenmachine niet het hele getal laten zien, het zal wel weer een repeterende breuk zijn (zie opgave 33).

Zie je dat je 0,7272727 ook kunt lezen als $72 \times 0,010101$? Dan herinner je je misschien ook wel dat $\frac{1}{9} = 0,111111$. Dan zou $\frac{1}{99} = 0,010101$ kunnen zijn...

Controleer het op je rekenmachine: het klopt! Nou ben je klaar, want 0,727272 is dan gelijk aan $72 \times \frac{1}{99} = \frac{72}{99} (= \frac{8}{11})$. Oh ja, er moet nog een 7 voor! $7,7272727 = 7 \frac{8}{11}$ en dan terug naar de opgave, $7 \frac{8}{11} = \frac{65}{11}$. Annemiek heeft dus de deling $65 : 11$ door de rekenmachine laten uitrekenen.

35 Drie Poolse soldaten

Eén soldaat gaat lopen terwijl de tweede soldaat (de motorrijder) de derde soldaat meeneemt. Hij zet deze onderweg af bij 40 kilometer. De derde soldaat moet dan de laatste 5 kilometer lopen terwijl de motorrijder de eerste soldaat ophaalt. Stel dat de eerste soldaat na precies een uur lopen (hij heeft dan 5 kilometer afgelegd) wordt opgehaald door de motorrijder, die er dan 75 kilometer op heeft zitten (40 heen en 35 terug). Het is dan 21.20 uur. Dan moeten ze met z'n tweeën op de motor richting kazerne, nog 40 kilometer en dat doen ze in iets meer dan een half uur. Ze zijn voor 22.00 uur in de kazerne. Nu gaan we met een plaatje kijken hoe alles precies in z'n werk is gegaan.



De twee pijlen bovenaan geven aan wat de lopende soldaten afleggen. De pijlen eronder geven aan wat de motorrijder aflegt. We delen de afstand van 45 kilometer in 9 stukken van elk 5 kilometer:

de afstand $v \rightarrow a$ is 5 kilometer

de afstand $a \rightarrow b$ is 35 kilometer

de afstand $v \rightarrow b$ is 40 kilometer

de afstand $a \rightarrow k$ is 40 kilometer

De motorrijder legt dus in totaal $40 + 35 + 40 = 115$ kilometer af in $\frac{115}{75} = \frac{23}{15} = \frac{92}{60}$ uur.

Dat is 1 uur en 32 minuten. Ze zijn dus om 21.52 uur in de kazerne.

Nog één ding. Waarom die verdeling in negen gelijke stukken?

Wel, als de eerste soldaat en de motorrijder elkaar bij punt a ontmoeten, heeft de motorrijder 15 maal zoveel afstand afgelegd als de soldaat ($75 = 15 \times 5$). En kijk nu nog eens naar de tekening. Het stukje $v \rightarrow a$ leggen de eerste soldaat en de motorrijder beiden af. Wat over blijft voor de motorrijder, is dus 14 maal het stukje $v \rightarrow a$. Dat rijdt de motor twee keer. Maak dus 7 stukken ervan, gelijk aan $v \rightarrow a$. Met net zo'n stuk erachter: negen gelijke stukken. En $45 : 9 = 5$ stuken van 5 kilometer.

36 Wegpakken

Je moet ervoor zorgen dat je een drievoud achterlaat voor je tegenstander. Laat hem beginnen! Kijk maar:

	pakt	over	pakt	over	pakt	over
je vriendje	1	6	2	3	1	0
ik	2		1		2	
je vriendje	2	6	1	3	2	0
ik	1		2		1	

En zo kun je nog een poosje doorgaan. Als hij er één pakt, pak jij er twee en omgekeerd, als het maar steeds samen drie is.

Er is nog een moeilijker variant van dit spelletje. Kijk maar eens of je dat kan uitzoeken. De oplossing lijkt wel een beetje op dat andere luciferspelletje. Het gaat als volgt: je hebt drie groepjes lucifers (of blokjes, kroonkurken, muntjes of iets dergelijks). Je hebt een groepje van drie, een groepje van vier en een groepje van vijf lucifers (dus in totaal 12 lucifers). Er zijn twee spelers. Je moet iedere beurt minimaal één en maximaal alle lucifers wegnemen van één groepje. Je mag dus niet in één beurt van verschillende groepjes wegpakken. Je mag wel (bijvoorbeeld) twee lucifers wegpakken van het stapeltje van vijf. Degene die de laatste lucifer moet pakken heeft *verloren*.

37 Raad-mijn-getal

Als iemand een getal kleiner dan 1000 in gedachten neemt en jij vraagt: 'Is het groter dan 500?', dan weet je uit het antwoord 'ja' of 'nee' of het onbekende getal groter is dan of gelijk is aan 1 en kleiner dan 501, of groter is dan 500 en kleiner dan 1000. Op de getallenlijn kun je dat mooi laten zien:

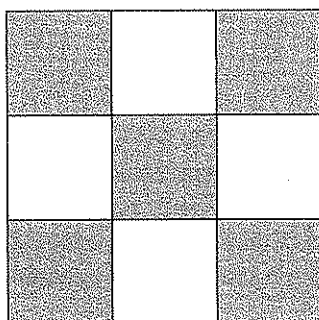
	Nee		Ja	
1		500		1000

Stel dat het eerste antwoord 'nee' is, dan valt weer de helft van de overgebleven getallen af bij de vraag 'Is het groter of kleiner dan 250?' Bij de derde vraag valt weer de helft van de overgebleven getallen af. Na de zesde vraag is nog maar $\frac{1}{64}$ -ste deel van de getallen over en na de tiende vraag nog maar $\frac{1}{1024}$ -ste deel. Dan is de rest kleiner dan het $\frac{1}{1024}$ -ste deel van 1000.

Na tien 'halveringsvragen' is het goede antwoord gevonden.

38 Vierkanten op het schaakbord

Begin met een kleiner bord, van bijvoorbeeld drie bij drie hokjes. Zo'n eenvoudiger situatie helpt nog wel eens om te zien waarom het precies gaat.



Je ziet eerst $3 \times 3 = 9$ hokjes. Denk ook aan het grote vierkant, dat is er één. En dan, bij goed denken en kijken, zie je nog vierkanten van 2×2 hokjes. Met een beetje schuiven zie je er vier. Samen $(3 \times 3) + (2 \times 2) + (1 \times 1)$. Als je dat zo opschrijft komt er een patroon tevoorschijn.

Dat patroon kan je op het schaakbord terugvinden:

$$(8 \times 8) + (7 \times 7) + (6 \times 6) + (5 \times 5) + (4 \times 4) + (3 \times 3) + (2 \times 2) + (1 \times 1) = 64 + 49 + 36 + 25 + 16 + 9 + 4 + 1 = 204$$

Nu kan je het ook uitrekenen voor een dambord!

39 Paraplu's en hoeden

Schrijf de gegevens op in een schema, dat helpt wel eens.

2 paraplu's	+	1 hoed	kosten	80
1 paraplu	+	2 hoeden	kosten	76
3 paraplu's	+	3 hoeden	kosten	156

Dus 1 paraplu en 1 hoed kosten samen 52. Simpel (als je het ziet)!

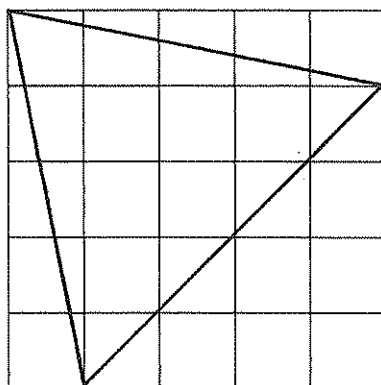
40 Wie kent het getal π niet?

$$\frac{377 - 22}{120 - 7} = \frac{355}{113} \quad (=3,14159292\dots)$$

Vergelijk deze uitkomst met de echte $\pi = 3,14159265\dots$, dan blijkt dat er maar liefst zes cijfers achter de komma goed zijn. Vergelijk dat met $\frac{22}{7} = 3,142857$ (daar is het derde cijfer achter de komma al fout) en $\frac{377}{120} = 3,141666\dots$ (hier is het vijfde cijfer achter de komma fout). Of hier een hogere wijsheid achter zit? Misschien was Adriaen Anthonisz gewoon iemand die altijd veel geluk had. Anders was hij ook geen burgemeester van Alkmaar geworden!

41 Roostervarianten en driehoeken

Hieronder zie je de grootste driehoek die voldoet aan de eisen. Wat is de oppervlakte van deze driehoek? De oppervlakte van het vierkant is 25 (ieder hokje is namelijk 1). Als je nu berekent welke stukken buiten de driehoek vallen: twee helften van rechthoeken van 1 bij 5, dus tweemaal $2\frac{1}{2}$, plus eenmaal de helft van 16 is 8; dan kun je uitrekenen dat er 13 afvalt van 25. De grootste driehoek heeft dus een oppervlakte van 12. Als je hetzelfde doet bij een vierkant van 4 bij 4 of andere vierkanten zul je merken dat de grootst mogelijke driehoek altijd een halfje minder is dan de oppervlakte van het vierkant.



42 1 tot en met 9

Je moet systematisch op zoek gaan en, als het kan, alle mogelijkheden bekijken. Dat lijkt een hele klus! Hoeveel verschillende getallen van drie cijfers zouden er wel niet gemaakt kunnen worden? Als je eerst eens wat probeert zie je al snel in welke richting je moet zoeken.

Begin je met 123 dan gaat het meteen al fout. Want 2×123 is 246 en dan gebruik je de 2 tweemaal. Je mag ieder cijfer maar eenmaal gebruiken.

Op de plaats van de honderdtallen (dat is het cijfer aan de linkerkant) mag je niet 'over de tien komen' want dan krijg je als tweede getal een getal van vier cijfers. Op de plaats van de honderdtallen mag je dus maximaal een 3 kiezen (wordt 6 en dan 9).

Als je links een 3 kiest moet je met het middelste cijfer oppassen. Want misschien moet je voor het middelste cijfer (de tientallen) wel iets 'onthouden' en ga je over de tien heen aan de linkerkant (en wordt het een getal met vier cijfers).

Als je dit zo ziet weet je al snel dat je links een 1 of een 2 moet kiezen. Als je een 3 kiest mag het middelste cijfer alleen maar een 1 of een 2 zijn (3 heb je immers al gebruikt en met 4 ga je over de tien heen).

Heb je al in de gaten dat je niet een getal als bijvoorbeeld 123 of 246 kunt gebruiken? In zo'n getal is het eerste cijfer al met 2 en 3 vermenigvuldigd en dan krijg je in de tweede en derde getallen dezelfde cijfers weer terug. Je mag immers ieder cijfer maar eenmaal gebruiken. Dat kan dus niet. Ook als je begint met 24 of 36 krijg je dit probleem.

Ga nu maar eens proberen welke getallen je kunt maken die beginnen met 3 en waarin het middelste cijfer een 1 of een 2 is. Getallen die met 31 beginnen kunnen niet, reken maar na:

$$312 \times 2 = 624$$

$$314 \times 2 = 628$$

$$315 \times 2 = 630$$

$$316 \times 2 = 632$$

$$317 \times 2 = 634$$

$$318 \times 2 = 636$$

$$319 \times 2 = 638$$

Je moet dus zoeken naar getallen die met 32 beginnen.

$$321 \times 2 = 642$$

$$324 \times 2 = 648$$

$$325 \times 2 = 650$$

$$326 \times 2 = 652$$

$$327 \times 2 = 654; 327 \times 3 = 981 \text{ (deze is goed!)}$$

$$328 \times 2 = 656$$

$$329 \times 2 = 658; 329 \times 3 = 978$$

Nu heb je nog die getallen die met een 1 of een 2 beginnen, en je hebt inmiddels al wat geleerd.

Alle getallen die met 12 beginnen zijn fout, want het tweede getal begint dan immers altijd met een 2. Zo ga je verder. Neem eerst de laatste twee cijfers, dat is gemakkelijker. Hoe verder je komt, hoe meer cijfers je weg kunt strepen. Zo zie je dat je nooit een 5 kunt kiezen, want dan komt er altijd in het derde getal weer een 5 te staan en dat mag niet. Uiteindelijk kom je bij 192, dat wordt 384 en dan 576, dus die klopt! En even later kom je bij 219, dat wordt 438 en dan 657, dus die oplossing is ook goed.

43 Vermenigvuldigen en delen (groep 6-8)

De vermenigvuldiging $7 \times 8 \times 9$ kun je ontbinden in $7 \times 2 \times 4 \times 3 \times 3$, want 8 kun je schrijven als 2×4 en 9 kun je schrijven als 3×3 . Als je $7 \times 2 \times 4 \times 3 \times 3$ anders opschrijft krijg je $7 \times 6 \times 4 \times 3$ en dat is deelbaar door 6. Zo kom je misschien op een idee voor de vraag of het product van drie opeenvolgende getallen altijd deelbaar is door 6?

In drie opeenvolgende getallen zit altijd een even getal en een getal dat deelbaar is door 3 (een drievoud). Hoe weet je dat? Omdat er maar drie soorten getallen zijn als je naar de drievouden (de tafel van 3) kijkt! Of een getal is een drievoud, of het is één meer dan een drievoud, of twee meer. Als het

drie meer is, dan is het natuurlijk zelf ook weer een drievoud. Nu weet je dat het product van drie opeenvolgende getallen altijd deelbaar is door 6. Want dat is immers ook een drievoud (2×3).

Op dezelfde manier: van vier opeenvolgende getallen weet je dat er altijd twee even getallen tussen zitten en één drievoud! En altijd een getal dat je door 4 kunt delen. Zo'n getal kun je dus delen door 2, door 3 en door 4, dus ook door $2 \times 3 \times 4 = 24$. Dus ook door 6 want $24 = 4 \times 6$.

44 In het kabouterbos

Begin bij een kabouter (het maakt niet uit welke), die noem je kabouter 1. Kabouter 1 gaat bij de uitgang staan. Kabouter 2 gaat er naast staan. Nu kun je opschrijven welke situatie de andere kabouters kunnen zien, als er twee kabouters naast elkaar bij de uitgang staan:

mogelijkheid 1: rode muts + groene muts

mogelijkheid 2: rode muts + rode muts

mogelijkheid 3: groene muts + rode muts

mogelijkheid 4: groene muts + groene muts

Kabouter 3 gaat bedenken wat er kan gebeuren. Hij kan zijn eigen muts niet zien, maar wel die van de beide kabouters die bij de uitgang staan. Als hij mogelijkheid 1 of 3 ziet moet hij tussen de beide kabouters in gaan staan. Bij mogelijkheid 2 of 4 moet hij er naast gaan staan. Op die manier kunnen de volgende situaties ontstaan:

mogelijkheid 1: rode muts + rode muts + groene muts

mogelijkheid 2: rode muts + groene muts + groene muts

mogelijkheid 3: rode muts + rode muts + rode muts

mogelijkheid 4: groene muts + rode muts + rode muts

mogelijkheid 5: groene muts + groene muts + rode muts

mogelijkheid 6: groene muts + groene muts + groene muts

Kabouter nummer 4 kijkt ook weer naar de kabouters die bij de uitgang staan, en hij gaat op de scheiding tussen rood en groen staan. Als er maar één kleur mutsen te zien is gaat-ie er naast staan. Zo ga je verder. Als alle kabouters in de rij staan beginnen de kabouters met de rode mutsen op door de uitgang te lopen. Iedereen kan dan immers wel zien wat de rode kant van de rij is. Bij de laatste rode muts gaat de vlag omhoog, de kabouters zijn vrij!

Maar wacht eens even...Wat nu als er maar één kabouter met een rode muts op is? Die ziet alleen maar groene mutsen om zich heen. Deze eenzame kabouter moet dan terugdenken aan hoe de rij ontstaan is. Toen hij in de rij ging staan waren er alleen nog maar groene mutsen te zien en hij sloot links aan in de rij. Alle volgende kabouters gingen tussen hem en de rest van de rij instaan. Dus hij weet dat hij de enige is die een rode muts op heeft! Tenzij... als die ene kabouter met zijn rode muts nu eens de laatste was die in de rij moest aansluiten? Of wat dacht je hiervan: als er alleen maar kabouters met groene mutsen zijn en geen enkele rode muts. Dan was die koning wel heel erg boosaardig, want in deze twee gevallen weet de laatste kabouter die in de rij aansluit niet wat hij moet doen.

45 Enen

Er zit een regelmaat in, zie je wel: $1 + 11 = 12$; $1 + 11 + 111 = 123$; $1 + 11 + 111 + 1111 = 1234$.

Bij vier enen eindigt de som op 4, dus bij 123456789 horen negen enen:

$1 + 11 + 111 + 1111 + 11111 + 111111 + 1111111 + 11111111 + 111111111$.

Als je nog een keertje goed kijkt zie je dat de eenheden negen keer voorkomen, de tientallen acht keer, enzovoort.

46 123456789

Je kunt heel veel getallen bedenken, want als uitkomst kun je bijvoorbeeld nemen 1234567890, maar ook 3710298456. Als je gewoon maar eens begint met wat te proberen tel je bij ieder cijfer 1 op: $111111111 + 123456789 = 1234567900$. Dat is 0 te veel en de 8 mist. Maar als je van 1234567900 10 aftrekt krijg je 1234567890!. Je hebt eerst 111111111 opgeteld en toen weer 10 afgetrokken, dus uiteindelijk heb je 111111101 opgeteld.

47 Miljoen

- a Er gaan 60 seconden in een minuut en 60 minuten in een uur. Een uur heeft dus $60 \times 60 = 3600$ seconden. In een dag gaan 24 uren, dus in 12 dagen gaan $12 \times 24 \times 3600 = 1036800$ seconden. Een miljoen seconden is dus minder dan 12 dagen. Om precies te zijn: 11 dagen, 13 uur, 46 minuten en 40 seconden.
- b Er gaan 60 minuten in een uur en 24 uren in een dag. Een dag heeft dus $60 \times 24 = 1440$ minuten. In een jaar gaan $365 \times 1440 = 525600$ minuten. Een miljoen minuten is dus minder dan twee jaar.
- c Een jaar heeft $24 \times 365 = 8760$ uren. Iemand die 114 jaar wordt heeft $114 \times 8760 = 998640$ uur, dus bijna een miljoen uur geleefd. Dat je zo oud zult worden is niet zo waarschijnlijk.

48 Waterverbruik

Per dag heeft het gezin 70 liter water nodig om de WC door te spoelen. Dat is $365 \times 70 = 25550$ liter water per jaar. Elke 1000 liter is 1 m³. Dus er gaat meer dan 25 m³ water per jaar door de WC, meer dan een kwart van het totale waterverbruik!

49 Bomen in een kring

Vier bomen om een cirkel betekent dat er vier tussenruimten zijn. Elke tussenruimte wordt verdubbeld om de volgende te krijgen. Begin met 1, dan krijg je daarna 2, 4 en 8, samen 15. En 15 is een kwart van 60 meter, de lengte van de cirkel. Dus alles gewoon met 4 vermenigvuldigen: $4 + 8 + 16 + 32 = 60$ meter. de kortste tussenruimte is 4 meter.

50 De eerste 1000

Een getal dat zowel door 6 als door 9 deelbaar is moet een achttienvoud zijn. $3 \times 6 = 18$ en $2 \times 9 = 18$. Hoeveel achttienvouden (de tafel van 18) kleiner dan 1000 zouden er zijn? $1000 : 18 = 55,55$. Dat kan je niet naar boven afronden, want $56 \times 18 = 1008$ en dan ga je over de 1000 heen. Er zijn dus 55 achttienvouden onder de 1000. Er zijn 55 getallen onder de 1000 die je kunt delen door 6 en door 9.

51 Geheimschrift

- Antwoord c is goed: $4 \blacktriangle \times 3 \blacktriangledown = (4 + 1) \times (3 - 1) = 5 \times 2 = 10 = 11 - 1 = 11 \blacktriangledown$
- $(4 \blacktriangle \times 3) \blacktriangledown = (5 \times 3) - 1 = 15 - 1 = 14$
- Je moet natuurlijk de $\blacktriangle$ gebruiken waar hij het beste resultaat oplevert, en je moet de $\blacktriangledown$ gebruiken waar hij zo min mogelijk schade aanricht. Dan kom je uit bij $(4 \times 3 \blacktriangle) \blacktriangledown = (4 \times 4) - 1 = 15$.
- $9 \blacktriangle \blacktriangle$ betekent $9 + 1 + 1 = 11$
- Bespreek je eigen opgaven met je leraar of met een andere leerling die deze vraag ook heeft gemaakt.

52 Palindroom

Bij een palindroomjaartal blijft het jaar hetzelfde als je de cijfers omdraait. Het eerste jaartal na 2002 waarbij dat zo is, is het jaar 2112. Er zit 110 jaar tussen 2002 en 2112.

53 Euro's op een bord

©	©	©	
	©	©	©
©	©		©
©		©	©

Er zijn $4 \times 4 = 16$ vakjes. Op iedere rij mogen er maximaal 3 liggen, dus het maximaantal eurocenten dat je kunt leggen is 12. Daarvoor hoef je het natuurlijk niet uit te proberen. Je kan op verschillende manieren 12 leggen. Als je een manier hebt gevonden, zoals in het voorbeeld hierboven, dan kan je het bord spiegelen of draaien (of allebei tegelijk) en dan zie je andere mogelijkheden. Maar die zijn eigenlijk niet echt verschillend, toch?

Als je de vraag goed hebt gelezen zie je dat er stond 'mogen er niet meer dan drie liggen'. Er kunnen er wel *minder* dan drie liggen dus. En dan zijn er nog allerlei andere oplossingen met 12 eurocenten, zoals bijvoorbeeld deze:

	©	©	©
©	©		©
©		©	©
©	©	©	

		©	©
©		©	©
©	©	©	©
©	©	©	

En die kun je vervolgens ook weer spiegelen of draaien.

54 Zeven miljard waterdruppels

Kijk eerst naar de totale inhoud van alle zeven miljard druppels. Die is $7 \times 49.000.000.000 \text{ mm}^3$.

Let op, dat komt mooi uit: $49 = 7 \times 7 \times 7$ en $1.000.000.000 = 1000 \times 1000 \times 1000$. Je hebt dus een bak van $7000 \times 7000 \times 7000$ millimeter nodig, en dat is $7 \times 7 \times 7$ meter.

55 Som van de cijfers is 6

Als je begint met getallen onder de 10 heb je alleen het cijfer 6. Dan ga je naar alle getallen onder de 100 (alleen getallen van twee cijfers, want de 6 had je al). Dan begin je met 15 ($1 + 5 = 6$), 24 ($2 + 4 = 6$), 33 ($3 + 3 = 6$), 42 ($4 + 2 = 6$), 51 ($5 + 1 = 6$) en 60 ($6 + 0 = 6$). Vanaf 60 tot 99 zijn alle sommen van beide cijfers hoger dan 6, dus je hoeft niet verder te kijken. Dan ga je beginnen aan de getallen van drie cijfers. Tussen 100 en 199 vind je er zes: 105, 114, 123, 132, 141, 150. Ga je door met de volgende honderd, dan vind je er vijf: 204, 213, 222, 231, 240. Zou dat steeds zo gaan? Ga je door met de volgende honderd, dan vind je er vier: 303, 312, 321, 330. Daarna 402, 411, 420 (drie getallen gevonden), 501, 510 (twee getallen gevonden) en 600 (één getal gevonden). Boven de 600 is de som van de cijfers natuurlijk altijd meer dan 6. Je hebt er 28 gevonden in totaal, antwoord a was dus goed.

Het kan ook op een andere manier: als je begint met getallen van drie cijfers en 6 schrijft als 006 en bijvoorbeeld 42 als 042. Dan begin je met tellen bij 006, 015, 024, 033, 042, 051, 060 (zeven bij de eerste honderd; je kunt 6 op zeven verschillende manieren in tweeën splitsen), 105, 114, 123 enzovoort. Bij de tweede honderd vind je er zes, want je kunt 5 op zes verschillende manieren splitsen. Bij het derde honderdtal vind je er vijf, want je kunt 4 op vijf verschillende manieren splitsen. Zo ga je verder en dan zie je dat het antwoord moet zijn $7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 28$.

56 Veerpont

Een kaartje voor de veerpont kost tussen € 1 en € 3. Maria stopt dus alvast een muntstuk van € 1 in haar portemonnee. Om alle bedragen tussen € 1 en € 2 te betalen heeft ze nog een muntstuk van € 1 nodig. Nu moet ze nog munten meenemen om alle bedragen tussen 1 en 99 cent te kunnen betalen (ze weet immers dat het kaartje minder kost dan € 3).

Om alle bedragen van 1 tot en met 9 cent te maken heeft ze een muntje nodig van 1 cent, van 2 cent en van 5 cent. Dan kan ze alleen 4 en 9 cent niet betalen. Daarvoor is een extra muntje van 1 cent nodig, of één van 2 cent.

Om alle bedragen van 10 tot en met 19 te maken heeft ze ook nog een muntje van 10 cent nodig. Als ze vervolgens een extra muntstuk van 10 cent meeneemt kan ze tot 29 cent komen, maar ze kan ook in plaats van dat extra muntje twee munten van 20 cent meenemen, dan kan ze tot 59 cent komen. Dan heeft Maria nog een munt van 50 eurocent nodig om alle bedragen tot en met 99 cent te kunnen maken. Met haar beide euro's erbij kan ze nu alle bedragen tot en met € 2,99 maken.

Er zijn dus twee manieren: Maria kan twee muntjes van 1 cent meenemen en één van 2 cent, net zoals ze kan kiezen om twee munten van 10 cent mee te nemen en één van 20 cent. Maar ze kan ook één muntje van 1 cent en één van 10 cent meenemen, en twee van 2 cent en 20 cent. In het totaal aantal munten maakt dat natuurlijk niet uit. Antwoord e is goed: in beide gevallen heeft ze tien munten nodig:

2 x € 1

2 x 1 cent (of 1 x 1 cent)

1 x 2 cent (of 2 x 2 cent)

1 x 5 cent

2 x 10 cent (of 1 x 10 cent)

1 x 20 cent (of 2 x 20 cent)

1 x 50 cent

57 Tussen 100 en 999

Als je kijkt naar getallen onder 100 (maar die tellen niet mee voor de vraag), dan zie je een bepaalde regelmaat:

10

20, 21

30, 31, 32

40, 41, 42, 43

50, 51, 52, 53, 54

Misschien is die regelmaat er ook bij de getallen tussen 100 en 999? Zet ze maar op een rij:

210

310, 320, 321

410, 420, 421, 430, 431, 432

510, 520, 521, 530, 531, 532, 540, 541, 542, 543

De regelmaat die je ontdekt is:

1

1 + 2

1 + 2 + 3

1 + 2 + 3 + 4

Deze regelmaat gaat door tot en met $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8$. Zie je waarom? De hele rij wordt dan $1 + 3 + 6 + 10 + 15 + 21 + 28 + 36 = 120$

58 Ballpoints

Gelukkig staan er al antwoorden waaruit je kunt kiezen. Dat maakt het oplossen van het probleem eenvoudiger. Begin bij het begin: 20 ballpoints van 25 cent kosten samen € 5. Dan heb je € 35 over voor twintig ballpoints van 1 en 5 euro. Maar je weet: er worden er meer verkocht van € 1 dan van € 5.

Kies bijvoorbeeld 1 pen van € 5, dan moet je er 19 van € 1 kiezen en dat kost samen 24 euro, te weinig dus. Je ziet nu al snel dat je er niet komt: 3 ballpoints van € 5 en 17 van € 1 kosten samen € 32, maar doe je er 4 van € 5 en 16 van € 1 dan ga je over de € 35 heen.

Het eerste gegeven antwoord is dus fout. Het tweede: 12 ballpoints van 25 cent, die kosten samen € 3. Dan heb je € 37 over voor 28 ballpoints van € 1 en € 5. Probeer het nu eens met grotere stappen. Als je 28 pennen van € 1 zou kopen, zou je € 28 kwijt zijn. Je zou dan € 9 over houden. Maar ruil nu een pen van 1 euro om voor een van 5, en dan hou je nog geld over. Zie je dat je moet kijken naar bedragen van € 4? Als je een pen van € 1 inruilt voor een van € 5 stijgt je bedrag met € 4. Negen euro is niet deelbaar door 4. Je houdt ook geld over bij 26 pennen van € 1; 25 pennen van € 1 zorgt ervoor dat je over je budget van € 37 gaat. Dit antwoord is dus ook fout.

Als je 24 ballpoints van 25 cent koopt moet je € 6 betalen en hou je € 34 over voor 16 pennen. Als je 16 pennen van € 1 koopt hou je € 18 over en dat is niet te verdelen in porties van vier, dus dit antwoord is ook fout.

Koop je 16 ballpoints van 25 cent dan moet je € 4 betalen en hou je € 36 over. Hee, dat is deelbaar door 4! Je moet voor dat bedrag nog 24 ballpoints kopen. Als je 24 ballpoints koopt voor € 1 hou je $36 - 24 = 12$ euro over. Nu zie je dat je drie pennen van € 1 kunt inruilen voor drie pennen van € 5 en dan moet je die € 12 nog bijbetalen. Controleer het maar: $(16 \times 0,25) + (21 \times 1) + (3 \times 5)$, dat zijn 40 ballpoints voor 40 euro.

59 Deelbaar door 11

Als je van een getal van twee cijfers de cijfers omdraait en de getallen optelt is de uitkomst altijd deelbaar door 11. Hoe kun je dat verklaren? Neem bijvoorbeeld het getal 58:

58 wordt 85

$(50 + 8)$ wordt $(80 + 5)$

$(10 \times 5) + (1 \times 8)$ wordt $(10 \times 8) + (1 \times 5)$

Zie je het al? Als je deze getallen bij elkaar optelt krijg je:

$(11 \times 5) + (11 \times 8) = 11 \times (5 + 8) = 11 \times 13$

Bij getallen van drie cijfers werkt het niet. Het trucje om tot 11 te komen lukt hier namelijk niet. Bijvoorbeeld 254, dat wordt 452. Maar als je dit moet uitschrijven krijg je $(2 \times 100) + (5 \times 10) + (2 \times 1)$ enzovoort. Je komt niet tot 11! Uitzondering hierop zijn de getallen 110, 220, 330 enzovoort. Als je die omdraait krijg je 011, 022, 033. Zie je het? De tafel van 11! Maar dat is eigenlijk smokken, want we zouden met getallen van drie cijfers gaan werken.

Met vier cijfers lukt het trucje weer wel. Probeer maar eens met het getal 1234 en let op dat je zorgvuldig optelt!

1234 wordt 4321, opgeteld 5555.

$(1 \times 1000) + (2 \times 100) + (3 \times 10) + (1 \times 4)$ wordt $(4 \times 1000) + (3 \times 100) + (2 \times 10) + (1 \times 1)$, en dat samenvoegen:

$(1001 \times 4) + (110 \times 3)$ wordt $(110 \times 2) + (1001 \times 1)$

$(110 \times 5) + (1001 \times 5) = 550 + 5005 = 5555 = 11 \times 505$

60 Zakrekenmachine

De rekenmachine die 0.1666667 laat zien heeft gelijk. Dat antwoord ligt namelijk het dichtst bij het goede antwoord 1,6666666666666666 enzovoort. Als je afrondt naar 0.1666666 is dat eigenlijk te laag.

Wanneer je $1 : 7 = 0.1428571$ uitrekent op je rekenmachine, kun je er achter komen welk cijfer de rekenmachine niet laat zien in het venster. Dat is het cijfer achter de laatste 1. Je moet dus de cijfers allemaal een plaats naar links laten schuiven, dan is er weer ruimte voor een extra cijfer. Je zoekt dus eigenlijk naar 1,428571. Dat krijg je door $10 : 7$ uit te rekenen. De uitkomst is 1.4285714, het volgende cijfer is dus een 4.

61 Voetbaltoernooi

Er moeten minimaal drie wedstrijden gespeeld worden, een zogenaamde halve competitie.

Als Blauw-Geel tegen Actief heeft gespeeld weten we wie de sterkste is van die twee, dan hoeft de wedstrijd Actief tegen Blauw-Geel dus niet gespeeld te worden. Als je ze wel allemaal twee keer tegen elkaar laat spelen is heb je een hele competitie. Dan zijn er zes wedstrijden nodig.

hele competitie		halve competitie	
Blauw-Geel	Actief	Blauw-Geel	Actief
Blauw-Geel	Caesar	Actief	Caesar
Actief	Blauw-Geel	Caesar	Blauw-Geel
Actief	Caesar		
Caesar	Blauw-Geel		
Caesar	Actief		

Zowel in het halve als in het hele competitieschema kunnen alle teams evenveel punten halen. Bijvoorbeeld als alle wedstrijden in een gelijkspel eindigen. Maar ook als Blauw-Geel beide wedstrijden wint van Actief; Actief beide wedstrijden wint van Caesar en Caesar beide wedstrijden wint van Blauw-Geel.

Het wedstrijdschema voor een halve competitie met vier teams kan er zo uitzien:

Blauw-Geel	Actief
Blauw-Geel	Caesar
Blauw-Geel	Tikkie Terug
Actief	Caesar
Actief	Tikkie Terug
Caesar	Tikkie Terug

Ieder team speelt drie wedstrijden, één tegen elke andere tegenstander. De wedstrijdleider moet de wedstrijden nog wel een beetje door elkaar husselen, want in dit schema moet Blauw-Geel alle wedstrijden achter elkaar spelen. Je kunt trouwens nog een ander schema maken:

Blauw-Geel	Actief
Caesar	Tikkie Terug
winnaar wedstrijd	winnaar wedstrijd
Blauw-Geel / Actief	Caesar / Tikkie Terug

Maar dit is niet zo leuk voor de teams die de eerste wedstrijd verliezen. Na één partijtje kunnen ze al weer naar huis gaan!

62 Eredivisie

Er zijn 18 clubs, iedere club speelt uit en thuis tegen iedere andere club. Dus $17 \times 2 = 34$ wedstrijden per club, $18 \times 34 = 612$ wedstrijden. Maar dat is dubbel, want je rekent alle wedstrijden tweemaal mee (Ajax -PSV, PSV-Ajax telt hier mee voor Ajax, maar ook voor PSV). Dus $612 : 2 = 306$ wedstrijden.

Sneller: elke club speelt 17 wedstrijden, er zijn 18 clubs, $17 \times 18 = 306$.

63 Wereldkampioenschap

Een hele of een halve competitie past niet in het televisieschema. In een halve competitie zouden 120 wedstrijden gespeeld moeten worden en dat zijn 60 TV-avonden. Dus moet er een afvalcompetitie worden gemaakt.

Eerste ronde: 16 teams, 8 wedstrijden (dus minstens 4 dagen nodig voor de TV)

Tweede ronde: 8 teams, 4 wedstrijden (dus minstens 2 dagen nodig voor de TV)

Derde ronde: 4 teams, 2 wedstrijden (dus minstens 1 dag nodig voor de TV)

Finale: 2 teams, 1 wedstrijd (1 TV-avond)

In 20 dagen kun je deze 8 wedstrijddagen wel inbouwen, ook als je rekening moet houden met rustdagen. Maar dan zijn er in die 20 dagen ook avonden dat er geen wedstrijd op TV is. Dat kun je oplossen met een poule-systeem.

In de eerste ronde zijn er vier poules van vier teams. In iedere poule worden $(4 \times 3) : 2 = 6$ wedstrijden gespeeld (halve competitie). Op één avond kunnen twee wedstrijden uitgezonden worden en na iedere wedstrijddag is er een rustdag. Je kunt deze poule dus in vijf dagen spelen: drie wedstrijddagen met op iedere dag twee wedstrijden en twee rustdagen er tussenin. Op de rustdagen kan de TV de wedstrijden uit een andere poule uitzenden.

Je houdt dan vier winnaars en vier tweede plaatsen over. Die spelen in een afvalcompetitie tegen elkaar. Dat zijn $4 + 2 + 1 = 7$ wedstrijden, waarvan de finale. Dat zijn dus twee TV-avonden, één TV-avond en nog één, samen vier avonden. Er tussenin komen nog de rustdagen! In totaal heb je inclusief rustdagen voldoende tijd binnen die twintig dagen.

64 Diagonalen

Je kunt een schema maken met verschillende veelhoeken (een veelhoek is een algemene term voor vier-, vijf-, zes-, enzovoort hoeken. In een driehoek kun je geen diagonalen trekken en een éénhoek en tweehoek bestaan niet):

veelhoek	aantal diagonalen vanuit elk hoekpunt	aantal diagonalen vanuit alle hoekpunten	aantal diagonalen (dit is de helft want ze tellen niet allemaal dubbel)
4	1	4	2
5	2	10	5
6	3	18	9
7	4	28	14
8	5	40	20
12	9	108	54
20	17	340	170
100	97	970	485

Wiskundigen redeneren over alle veelhoeken tegelijk. geen vierhoek of zeshoek, maar een n -hoek. De letter n kan voor ieder geheel getal groter dan 3 staan. Alles wat boven in de tabel staat kun je nu in één keer opschrijven als:

n	$n - 3$	$n \times (n - 3)$	$\frac{1}{2} n \times (n - 3)$
-----	---------	--------------------	--------------------------------

65 Getallen maken

Van 2, 5 en 7 kun je de volgende getallen maken van twee cijfers:

25
27
52
57
72
75

Elk cijfer komt twee keer voorop en twee keer achterop.

Van 3, 6, 8 en 9 kun je vier rijtjes van zes getallen maken, dus 24 in totaal. Als je eerste begint met drie cijfers krijg je dit:

368
386
638
683
836
863

Maar zie je het: als je 3 vervangt door 9 krijg je weer zes mogelijkheden. Als je 6 of 8 vervangt door 9 ook. Er zijn dus vier rijtjes van zes.

Wiskundigen redeneren anders. Zij zeggen: 'Als ik begin een getal te maken kan ik kiezen uit vier cijfers. Als ik een cijfer heb gekozen kan ik voor de tweede plaats nog uit drie cijfers kiezen, $4 \times 3 = 12$. Voor de derde plaats heb ik er nog twee, $12 \times 2 = 24$ mogelijkheden. Snap je die redenering?

66 Hoe verder?

5 25 125 625 3125

Deze getallen worden telkens met 5 vermenigvuldigd: $5, 5 \times 5, 5 \times 5 \times 5$ enzovoort. Het kan ook anders: ieder verschil is vijf keer zo groot als het vorige verschil. $25 - 5 = 20, 125 - 25 = 100$, dus je kunt aanvullen met $5 \times 100 = 500$ en $5 \times 500 = 2500$. Kijk eens: $625 - 125 = 500$ en $3125 - 625 = 2500$. Toeval?

2 8 16 126 2048
26 38

De regelmaat is $2 \times 8 = 16$, dan zou het vierde en vijfde getal $8 \times 16 = 128$ en $16 \times 128 = 2048$ kunnen zijn. Maar wat ook kan: $2 + 6 = 8, 8 + 8 = 16, 16 + 10 = 26, 26 + 12 = 38$. Er komt steeds 2 extra bij. Twee verschillende uitkomsten van dit rijtje, maar allebei goed!

1 1 2 3 5 8 13

Deze getalrij noemen we de *rij van Fibonacci*, het is een oude bekende voor wiskundigen. Je vindt ieder getal door de voorgaande twee op te tellen. Over de rij van Fibonacci is heel wat te vertellen, zoek maar eens op internet.

67 Handig rekenen

In de bovenste rij kun je de cijfers bundelen. Het eerste en laatste cijfer zijn samen 10, het tweede en één na laatste ook, enzovoort. De 5 blijft over. Een handige manier om deze som uit te rekenen is dus $(4 \times 10) + 5 = 45$.

Ook bij de tweede rij kun je cijfers bundelen, maar op een andere manier: $1 + (2 - 3) + (4 - 5) + (6 - 7) + (8 - 9) = 1 - 1 - 1 - 1 - 1 = -3$ en dat is een *negatief getal*, het komt onder nul (een soort tekort, dus). Bij de laatste twee rijen kun je ook dit soort combinaties maken.

68 Honderd

Net als in de rij van Fibonacci (zie opgave 66) moet je de twee voorgaande getallen optellen om het volgende getal te krijgen. Als je weet dat het vijfde getal 100 is kun je zo terugrekenen. Probeer maar eens $30 + 70 = 100$. Dat gaat niet, want je kunt geen getal invullen dat kleiner is dan 30, maar samen met 30 toch 70 oplevert. Die is dus niet goed. Probeer daarna maar eens $40 + 60 = 100$. Die kan wel, want het eerste en het tweede getal zijn dan 20. Je krijgt een rijtje $20 - 20 - 40 - 60 - 100$.

Je kunt dit ook anders aanpakken, op een wiskundige manier. De twee voorgaande getallen die samen het volgende getal opleveren noem je x en y . Je kan het zo opschrijven: $100 = (x + y) + (x + 2y)$. Vul de getallen van het rijtje dat we al gevonden hebben maar in: $100 = (20 + 20) + (20 + (2 \times 20))$; $100 = 40 + 20 + 40$

Als je voor x een getal invult kun je y uitrekenen. Er zijn verschillende oplossingen:

20	20	40	60	100
2	32	34	66	100
5	30	35	65	100
8	28	36	64	100
11	26	37	63	100
14	24	38	62	100
17	22	39	61	100

Boven 20 lukt het niet meer, want dan wordt y kleiner dan x en dat mag niet.

69 Kubus

De lengte van de kubus (en dus ook de hoogte en breedte) is 8 (je ziet immers $64 = 8 \times 8$ kleine kubusjes). De gehele kubus bestaat dus uit $8 \times 8 \times 8 = 512$ kleine kubusjes.

Er zijn acht hoekblokjes op de acht hoeken van de kubus, die allemaal drie rode zijvlakjes hebben.

De blokjes tussen de hoekpunten bevinden zich op de ribben van de kubus. Zij hebben allemaal twee orde zijvlakjes. Van de acht kubusjes op de ribbe vallen er twee hoekpunten af, blijft over zes kubusjes per ribbe met twee rode zijvlakjes. Er zijn 12 ribben en dus $12 \times 6 = 72$ kleine kubusjes met twee rode zijvlakjes.

Van ieder zijvlak heb je nu 28 kubusjes met rode verf gehad. Er blijven er per zijvlak 36 over dus in totaal $6 \times 36 = 216$ kubusjes met één rood zijvlakje. Je kunt ook zeggen dat er zijvlakken van 6×6 kubusjes overblijven als je de rand wegdenkt, dan is de oplossing $6 \times 6 \times 6 = 216$.

Binnenin zitten nog 216 kubusjes die helemaal niet geverfd zijn. $512 - 8 - 72 - 216 = 216$. Dit kan je je ook weer voorstellen als een kubus die in de grote kubus zit, met zijden van 6×6 blokjes. dan is de berekening dus opnieuw $6 \times 6 \times 6 = 216$.

70 Dobbelstenen

Op de dobbelsteen is de som van tegenoverliggende zijden altijd 7. Van de bovenste dobbelsteen weet je dan, dat op de kanten die je niet ziet een 4 en een 2 staan. De 6 kan je niet zien als je om de dobbelsteen heen loopt, want die staat op de onderkant. Van de middelste steen kan je de boven- en onderkant niet zien als je er omheen loopt. Tegenover de 6 is de 1, tegenover de 2 de 5. De 3 en de 4 kan je niet zien. De onderste steen tenslotte, daarvan weet je dat de 3 en de 5 op de andere kant staan, dus de 6 en de 1 blijven verborgen. In totaal kun je $6 + 3 + 4 + 6 + 1 = 20$ stippen niet zien als je om dit stapeltje heen zou lopen.

Het kan ook anders. Op drie dobbelstenen staan in totaal 63 stippen. 43 zijn er te zien als je om het stapeltje heen loopt, dus 20 niet.

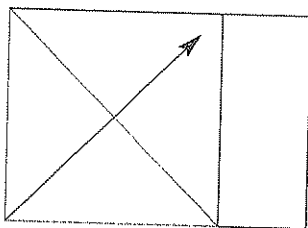
71 Waar of niet waar?

- a Dat is waar. Een oneven getal is een even getal + 1. De som van twee even getallen is altijd een even getal. Dus de som van een even getal en een even getal + 1 is altijd oneven.
- b Dat is waar. Oneven getallen kun je niet delen door 2. Als je ze met elkaar vermenigvuldigt komt er niet zomaar een factor 2 uit de lucht vallen.
- c Dat is niet waar. Denk bijvoorbeeld aan $2 + 4 + 6 = 10$.
- d Dat is niet waar, maar zo'n getal eindigt wel altijd op een vijfvoud. Een vijfvoud eindigt op 5 of op 0.
- e Dat is waar, want in drie opeenvolgende getallen zit altijd een even getal en een getal dat je door 3 kunt delen. Als je vermenigvuldigt krijg je altijd een uitkomst die je door 2 en door 3 kunt delen, dus ook door 6.

72 Vierkant

Om de opdracht te kunnen doen moet je weten dat de vier zijden van een vierkant even lang zijn. Je moet ook weten dat alle vier de hoeken rechte hoeken zijn. Wat is een rechte hoek? Kijk maar naar het blaadje A4, dat heeft vier rechte hoeken. Het blaadje is rechthoekig. Je moet het nu zo vouwen, dat het een vierkant wordt. Je moet dus zorgen, dat alle vier de zijden even lang zijn, en alle vier de hoeken recht. Dat doe je door de kleine zijde van het blaadje langs de grote zijde te

vouwen. De strook die overblijft knip je af. Nu heb je een vierkant. Alle zijden zijn even lang, en alle hoeken zijn recht.



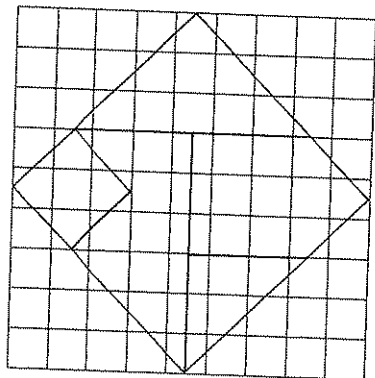
73 Oppervlakte op ruitjespapier

Kijk voor de oplossing naar rechthoeken waarvan de gevraagde figuur een deel is. Dat rekent gemakkelijker. Driehoek A is de helft van de rechthoek 3×6 . De oppervlakte van A is $18 : 2 = 9$. Driehoek C is de helft van de rechthoek 3×3 . De oppervlakte van C is $9 : 2 = 4\frac{1}{2}$. Figuur B bestaat uit een vierkant van $3 \times 3 = 9$ en een kwart van een vierkant van $3 \times 3 = 9$, dus $9 + \frac{9}{4} = 11\frac{1}{4}$.

Figuren D en E zijn iets moeilijker. Eerst figuur D. Als je goed kijkt, zie je dat D bestaat uit twee driehoeken die $\frac{1}{4}$ zijn van een vierkant 3×3 (net als bij figuur B). Samen zijn die twee driehoekjes dus de helft van een vierkant van $3 \times 3 = 9$, dus figuur D heeft een oppervlakte van $4\frac{1}{2}$. Voor figuur E kun je het best een hulplijn trekken van de zijde linksonder van figuur D naar het hoekpunt rechts-onder van de grote rechthoek. Dan zie je meteen dat figuur E uit twee driehoeken bestaat. De grote driehoek is de helft van de rechthoek $6 \times 3 = 18$, dus $18 : 2 = 9$. De kleine driehoek ken je al van figuur B en D, die is $\frac{1}{4}$ van de rechthoek 3×3 , dus $\frac{9}{4}$. De oppervlakte van E is dus $9 + \frac{9}{4} = 11\frac{1}{4}$. De oppervlakte van alle figuren samen is $40\frac{1}{2}$. De oppervlakte van de totale rechthoek is 54. De oppervlakte van de drie driehoeken die je overhoudt is $13\frac{1}{2}$. Zo kun je controleren of je alle oppervlakten goed had berekend, $54 - 13\frac{1}{2} = 40\frac{1}{2}$.

74 Puzzelvierkant

Je kunt natuurlijk gewoon gaan puzzelen. Dat is best leuk, maar niet erg wiskundig. Misschien ben je in opgave 73 wel op een wiskundig idee gekomen. Bijvoorbeeld toen je nog eens nadacht over de totale oppervlakte van de figuren, $40\frac{1}{2}$. Bij een vierkant is de oppervlakte een kwadraat (want de zijden zijn gelijk). Maar $2 \times 40\frac{1}{2} = 81$ en dat is wel een kwadraat, namelijk $9 \times 9 = 9^2$. Dus ons puzzelvierkant moet de helft daarvan zijn. Dat hebben we ook net gezien in opgave 73, een vierkant dat de helft is van een ander vierkant. Je moet de zijden dan diagonaal maken, zie je wel? Als je begint langs de zijkant van het grote vierkant lukt het niet.

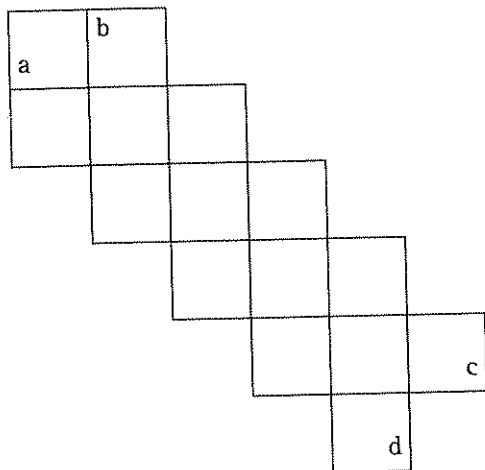


75 Bouwplaatje dobbelsteen

Je wist uit opgave 70 hoe de stippen staan. Vouw het bouwplaatje in gedachten in elkaar. Tegenover de 6 zit de 1. Dat is in het bouwplaatje het linker vakje. Je weet dat de som van tegenoverliggende ogen altijd 7 moet zijn. Dus de 2 en de 5 zijn tegenoverliggend, en de 3 en 4 ook. Dit bouwplaatje lijkt op de middelste dobbelsteen uit opgave 70. Dus als je links naast de 6 de 2 intekent, dan komt de 5 rechts van de 6. De 3 komt boven de 6 en de 4 eronder.

76 Kubus vouwen

De figuur heeft 12 vakjes en een kubus heeft zes zijvlakken. Hoe moet dat dan? Zijvlakken van 2 vakjes? Dat lukt je niet. Denk maar weer even aan opgave 74, het puzzelvierkant. De oppervlakte van een kleiner vierkant in een groter vierkant was in die opgave de helft van de oppervlakte van het grote vierkant. Zo moet je het hier ook aanpakken. Trek een rechthoek tussen de hoeken a tot en met d en dan zie je 25 driehoekjes ontstaan. De kubus telt 24 driehoekjes, dus je houdt er één (die rechtsboven) over om te plakken.



77 Het 24-spel (1)

$$8 - 2 = 6$$

$$5 - 2 = 3$$

$$2 \times 5 = 10$$

$$5 \times 6 = 30$$

$$6 - 3 = 3$$

$$10 + 6 + 8 = 24$$

$$30 - 6 = 24$$

$$3 \times 8 = 24$$

Kun jij nog andere oplossingen vinden?

78 Het 24-spel (2)

Een kaartje waarvan je zeker weet dat niemand een oplossing kan vinden is 1111. Daar kun je nooit 24 mee maken. Kaartjes met 1112, 1122, 1222 en 2222 zijn ook duidelijk: daar lukt het niet mee. Maar dan wordt het lastig. Van 2223 kun je 24 maken ($2 \times 2 = 4$; $2 \times 4 = 8$; $3 \times 8 = 24$). Van 2224 ook ($2 + 4 = 6$; $2 \times 6 = 12$; $2 \times 12 = 24$). Van 2225 ook ($2 \times 5 = 10$; $10 + 2 = 12$; $2 \times 12 = 24$). Dat schiet natuurlijk niet op. En wat, als jij bij een bepaald kaartje geen oplossing kan vinden? Misschien is er wel iemand anders die een oplossing kan verzinnen. Gelukkig had je al 1111 bedacht om de vraag te beantwoorden... Dat probleem heb je ook als je vier verschillende cijfers moet gebruiken voor een kaartje, waar niemand de oplossing voor kan vinden. Wij hebben 1379, 1479 en 1579 bedacht. Maar misschien hebben wij wel een oplossing over het hoofd gezien!

Een kaartje met vier dezelfde cijfers waar wel een oplossing voor bestaat is gemakkelijker te vinden. De cijfers 1 en 2 hebben we hierboven al gehad, daar lukt het niet mee.

3333 $3 \times 3 = 9; 3 \times 9 = 27; 27 - 3 = 24$
 4444 $4 \times 4 = 16; 16 + 4 + 4 = 24$
 5555 $5 \times 5 = 25; 5 : 5 = 1; 25 - 1 = 24$
 6666 $6 + 6 + 6 + 6 = 24$
 Weet jij nog een oplossing voor 7777, 8888 of 9999?

79 Het 24-spel (3)

Victor kijkt eerst naar de kaartjes met vier dezelfde cijfers. Wij zagen al in de vorige vraag dat er negen van die kaartjes zijn en dat twee ervan geen oplossing hebben (van drie weten we het nog niet zeker).

Als Victor gaat kijken naar kaartjes met twee verschillende cijfers erop wordt het al moeilijker. Hij heeft negen cijfers om mee te beginnen. Voor het tweede cijfer heeft hij nog acht cijfers over. Dat levert $9 \times 8 = 72$ kaartjes op. Maar let op: een kaartje met 21 is natuurlijk hetzelfde als een kaartje met 12. Dus Victor deelt 72 om de dubbele kaartjes eruit te halen. Hij heeft nu $72 : 2 = 36$ kaartjes over.

Dan de laatste twee cijfers. Ieder begin van twee cijfers kun je op drie verschillende manieren afmaken, kijk maar: 1311, 1333, 1313 (want je ziet natuurlijk wel dat 1331 hetzelfde kaartje is als 1313?). Het totaal aantal kaartjes met twee verschillende cijfers is dus $36 \times 3 = 108$.

80 Het 24-spel (4)

Laura heeft ongelijk. Om te beginnen tellen de kaartjes dan dubbel. 1234 is immers hetzelfde kaartje als 4321. Bovendien zitten er getallen als bijvoorbeeld 2000 tussen en we hadden afgesproken dat we geen 0 zouden gebruiken.

81 Het 24-spel (5)

Felix heeft net zo gedacht als wij hebben gedaan in opgave 79. Als je begint met een kaartje heb je de keuze uit negen cijfers. Het cijfer dat je gebruikt mag niet nogmaals voorkomen, dus het tweede cijfer moet uit acht resterende cijfers gekozen worden. Voor het derde cijfer heb je op die manier nog zeven cijfers over en voor het vierde nog maar zes. $9 \times 8 \times 7 \times 6 = 3024$. Kijk nog maar eens goed naar de oplossing bij opgave 79.

Trouwens, zag je dat Felix alleen maar de kaartjes met vier verschillende cijfers heeft geteld? Er zijn toch ook nog kaartjes met twee, drie of vier dezelfde cijfers!

82 Het 24-spel (6)

Als je de oplossingen tot nu toe hebt begrepen moet je hier uit kunnen komen. Wij zeggen alleen nog dit: als je vier verschillende cijfers kiest kun je daarmee 24 kaartjes maken die hetzelfde zijn. Kijk maar (we nemen als voorbeeld 1234):

1	2	3	4
1	2	4	3
1	3	2	4
1	3	4	2
1	4	3	2
1	4	2	3

En zo kun je ieder cijfer van 1234 vooraan zetten, je hebt dus $4 \times 6 = 24$ mogelijkheden. Maar al deze kaartjes zijn hetzelfde! Dat merkte Eva toen ze het spel wilde gaan maken.

83 Het 24-spel (7)

kaartjes met 1 cijfer (vier dezelfde cijfers, bijv. 1111)	9
kaartjes met 2 cijfers (twee of drie dezelfde cijfers, bijv. 1112 of 1122)	108
kaartjes met 3 cijfers (twee dezelfde cijfers, bijv. 1231)	$((9 \times 8 \times 7) : 6) \times 3 = 252$
kaartjes met 4 cijfers (nul dezelfde cijfers, bijv. 1234)	$((9 \times 8 \times 7 \times 6) : 24 = 126$
totaal aantal kaartjes	$9 + 108 + 252 + 126 = 495$

84 Verjaardag

Tussen 28 februari 1990 en 28 februari 2001 zitten 11 jaar. Een jaar heeft 365 dagen, behalve een schrikkeljaar. Een schrikkeljaar heeft 366 dagen. Een schrikkeljaar is om de vier jaar en het jaartal is deelbaar door 4. Dus 1990 en 1991 waren geen schrikkeljaren, ze zijn niet deelbaar door 4. Maar 1992 wel, dat is deelbaar door 4 ($1992 = 498 \times 4$). Dus 1996 en 2000 zijn ook schrikkeljaren. Bij 2000 is trouwens nog iets anders aan de hand, vraag dat aan je leraar of zoek op internet als je dit onderwerp interessant vindt.

Nu kun je het aantal dagen simpel uitrekenen:

$(11 \times 365) + 3 = 4015 + 3 = 4018$. Peter, gefeliciteerd met je 4018 levensdagen!

85 Twintig miljoen

Als je de leraar niet gelooft moet je de minuten omrekenen naar jaren. Dan kom je er achter of hij de waarheid spreekt. Laat de schrikkeljaren maar weg, want we zijn tevreden met een redelijk nauwkeurige schatting. $365 \text{ dagen} \times 24 \text{ uur} \times 60 \text{ minuten} = 525.600 \text{ minuten}$ in een jaar. Op je rekenmachine kun je het precies uitrekenen, $20.000.000 : 525.600 = 38,05175$. Dat betekent dat de leraar ruim 38 jaar oud is. Als je geen rekenmachine bij de hand hebt kun je 525.600 afronden op 500.000 en dan zie je dat de leraar 40 jaar is geworden ($40 \times \text{een half miljoen}$ is 20 miljoen) en daar moet je dan nog wat van afdoen, want 525.600 gaat minder dan 40 keer in 20 miljoen.

86 Groter, kleiner, precies

Een zo groot mogelijke som krijg je als je de hoogste cijfers op de plaats van de honderdtallen zet en de daaropvolgende cijfers op de plaats van de tientallen:

$$\begin{array}{r} 972 \\ 831 \quad + \\ \hline 2803 \end{array}$$

De kleinste som krijg je als je precies het tegenovergestelde doet:

$$\begin{array}{r} 138 \\ 279 \quad + \\ \hline 417 \end{array}$$

Als je $800 + 300$ of $900 + 200$ in gedachten neemt moet de som van de laatste twee cijfers 100 zijn om precies op 1200 uit te komen. Bij $800 + 300$ heb je de cijfers 1, 2, 7 en 9 over, daarvan kan je 21 en 79 maken.

$$\begin{array}{r} 821 \\ 379 \quad + \\ \hline 1200 \end{array}$$

Bij $900 + 200$ heb je 1, 3, 7 en 8 over en kun je $87 + 13$ maken.

$$\begin{array}{r} 987 \\ 213 \quad + \\ \hline 1200 \end{array}$$

87 Vermenigvuldigen

48	
1	48
2	24
3	16
4	12
6	8

24	
1	24
2	12
3	8
4	6

36	
1	36
2	18
3	12
4	9
6	6

72	
1	72
2	36
3	24
4	18
6	12
8	9

100	
1	100
2	50
4	25
5	20
10	10

88 Delers

2^2 betekent niets anders dan 2×2 . De rijtjes zijn juist:

$$18 = 2 \times (3 \times 3) = 2 \times 9$$

$$36 = (2 \times 2) \times (3 \times 3) = 4 \times 9$$

$$56 = (2 \times 2 \times 2) \times 7 = 8 \times 7$$

2^1 betekent 2 (factor 1 is een beetje vreemd, want er valt niets te vermenigvuldigen).

$$18 = (2 \times 1) \times (3 \times 3) = 2 \times 9$$

De exponent geeft aan hoeveel factoren je moet nemen. 2^3 betekent dat je drie factoren 2 moet nemen, dus: $2 \times 2 \times 2$.

De mooie regel voor het getal 36 is:

$36 = 2^2 \times 3^2$, de exponenten zijn 2 en 2. Het aantal delers is 3×3 . De regel is: het aantal delers van 36 is $(2 + 1) \times (2 + 1) = 9$. Je ontbindt het getal in factoren, schrijft het met machten en neemt dan de exponenten van alle factoren, telt er 1 bij op en vermenigvuldigt die getallen.

$250 = 2 \times 125 = 2^1 \times 5^3$. Het aantal delers is volgens de regel $(1 + 1) \times (3 + 1) = 2 \times 4 = 8$. Ga maar na, het klopt!

$72 = 2^3 \times 3^2$. Het aantal delers is volgens de regel $(3 + 1) \times (2 + 1) = 4 \times 3 = 12$.

$108 = 2^2 \times 3^3$. Het aantal delers volgens de regel is $(2 + 1) \times (3 + 1) = 3 \times 4 = 12$.

89 Verrassing

Hoe kun je weten of het altijd klopt? Door het voor ieder getal onder de honderd na te rekenen. Maar wie heeft daar nou zin in? Er is vast wel een eenvoudiger manier. Heb je opgave 59 gemaakt? Bij een getal van twee cijfers het omgekeerde ervan optellen geeft een som die altijd deelbaar is door 11.

Laten we dit eens bekijken voor zomaar een getal, 39. De 3 van 39 is een *tiental*. Draai je het getal om dan wordt het 93 en daarin is diezelfde 3 een *eenheid* geworden. $30 = 10 \times 3$ en $3 = 1 \times 3$, samen is dat 11×3 . Hetzelfde geldt voor de 9, die is eerst eenheid en wordt als je het getal omdraait een tiental: $9 = 1 \times 9$ en $90 = 10 \times 9$, samen 11×9 .

kies een getal en tel de cijfers bij elkaar op:	$3 + 9 = 12$
vermenigvuldig met	$11: 11 \times 12 = 132$
trek het eerste getal er af:	$132 - 39 = 93$
verwissel de cijfers van het getal:	93 wordt 39

$$\begin{aligned} 39 + 93 &= 30 + 9 + 90 + 3 \\ &= 33 + 99 \\ &= (3 \times 11) + (9 \times 11) \\ &= 12 \times 11 \\ &= 11 \times 12 \\ &= 11 \times (3 + 9) \\ &\text{en dan zijn we waar we willen zijn!} \end{aligned}$$

90 Een spring-denkpuzzel

Doen is niet zo moeilijk, maar hoe onthoud je de zetten? Bedenk een manier om de achtereenvolgende zetten op te schrijven.

1		z1	z2		z3	w1	w2	w3	
2		z1	z2	w1	z3		w2	w3	
3		z1	z2	w1	z3	w2		w3	
4		z1	z2	w1		w2	z3	w3	
5		z1	z2	w1		w2		w3	z3
6		z1		w1	z2	w2		w3	z3
7		z1		w1		w2	z2	w3	z3
8		z1		w1	w2		z2	w3	z3
9		z1	w1		w2		z2	w3	z3
10			w1	z1	w2		z2	w3	z3
11		w1		z1	w2		z2	w3	z3
12		w1	w2	z1			z2	w3	z3
13		w1	w2	z1		w3	z2		z3
14		w1	w2	z1	w3		z2		z3
15		w1	w2		w3	z1	z2		z3
16		w1	w2	w3		z1	z2		z3
17		w1	w2	w3		z1		z2	z3
18		w1	w2	w3			z1	z2	z3

In 15 beurten heb je wit en zwart van kant verwisseld. Daarna heb je nog drie beurten nodig om het wat netter te ordenen.

