

Groot Problemenboek

Leerlingenboek

10/1/55 Menduto m.
gilio m. p. r. far (capitano) Gab.
In La Lega di Guido Torino 1936
Durantio In Urbino 1935
Giulio Rossi

1527
M. G. 40 di
In luglio M.

Je vindt in dit Groot Problemenboek vijftig opgaven over rekenen en wiskunde. Ze staan kris kras door elkaar, dus als een bepaalde opgave te moeilijk lijkt, probeer dan eerst een andere opgave voordat je hulp vraagt. Je kunt dan altijd nog een keer dat lastige probleem proberen op te lossen. Vaak lopen echte probleemoplossers lang met een opgave rond en komen dan stukje bij beetje dichterbij een oplossing.

Bij enkele opgaven vind je 'info's'. Wat daar staat verheldert het probleem en is ook de moeite waard om te onthouden.

Er is ook een boek met oplossingen. Eigenlijk moet je daar alleen naar vragen als je meent een oplossing gevonden te hebben. In dat geval kun je jouw oplossing vergelijken met die uit het boek. Maar denk niet dat de oplossingen uit het boek de beste zijn. Het is heel goed mogelijk dat jouw oplossing korter, sierlijker, knapper of gewoon mooier is. Als je dat zelf ook vindt, zeg dat dan aan je leraar.

Tenslotte: schrijf je oplossing op, maar ook alles wat je erbij denkt.

1 Even, oneven

Als je de rij natuurlijke getallen opschrijft, 1, 2, 3, 4, enzovoort, en je neemt daaruit zomaar twee opeenvolgende getallen en telt die op, dan is de uitkomst altijd oneven. Waar of niet? Hoe weet je dat zeker?

3

2 Vermenigvuldigingen

Je kunt op papier of met je rekenmachine natuurlijk 435×5871 uitrekenen.

- a Maar kun je ook voordat je gaat vermenigvuldigen beredeneren uit hoeveel cijfers de uitkomst bestaat?
- b Hoeveel cijfers heeft de uitkomst van 999×9999 ?
- c Weet je nu uit hoeveel cijfers het *product** van een getal van 3 cijfers en een getal van 4 cijfers bestaat? Zeker weten?

* Met het product van 7 en 9 bedoelen we 7×9 .

3 Knikkers

Je hebt een zak met knikkers. Als je alle knikkers eerlijk verdeelt over 2 kinderen, houd je 1 knikker over. Maar als je de knikkers eerlijk verdeelt over 3, 4, 5 of 6 kinderen, houd je ook steeds 1 knikker over.

Hoeveel knikkers zitten er minstens in die zak?

4 Optellen

Als je de getallen 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 en 10 bij elkaar optelt, krijg je 55. Maar welke uitkomst krijg je als je de getallen van 1 tot en met 100 bij elkaar zou optellen?

5 Nullen

Als je $1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 \times 8 \times 9 \times 10$ op je rekenmachine uitrekent, krijg je 3628800. Een getal dat op 2 nullen eindigt. Bereken op hoeveel nullen het getal eindigt dat je zou krijgen als je uitrekent: $1 \times 2 \times 3 \times 4 \times \dots \times \dots 98 \times 99 \times 100$.

6 Een wonderlijke kermis

Jan ging met zijn zakgeld naar een wonderlijke kermis. Voor het reuzenrad moest hij $\frac{1}{3}$ deel van zijn zakgeld betalen. Daarna kocht hij een colaatje voor 3 euro.

Bij de botsautootjes moest hij toen weer $\frac{1}{3}$ deel betalen van het zakgeld dat hij nog over had. Na de botsautootjes kocht hij weer een cola voor 3 euro. Toen naar het spookhuis. Weer moest hij $\frac{1}{3}$ deel van de rest van zijn zakgeld betalen.

Na het spookhuis dronk hij weer een cola voor 3 euro. Tot slot ging hij naar de waarzegster. Dat kostte hem weer $\frac{1}{3}$ deel van de rest van zijn zakgeld.

Na de waarzegster nam hij weer een colaatje voor 3 euro en ging naar huis. Hij had toen nog 7 euro over. Met hoeveel euro ging Jan naar de kermis?



7 Handtekeningen

In de krant stond: In Duitsland hebben ze voor een actie 86 kilo handtekeningen opgehaald! Hoeveel handtekeningen zullen dat zijn?

8 Nederlanders

In Nederland wonen inmiddels 16 miljoen mensen. Als al die Nederlanders naast elkaar gaan staan en elkaar een hand geven, zou die kring dan de aarde* omspannen?

9 Som en product

Als je 3 en 6 optelt krijg je 9 (de som van 3 en 6) en als je ze vermenigvuldigt krijg je 18 (het product van 3 en 6). Je ziet dat het product (18) *deelbaar*** is door de som (9). Dat is natuurlijk niet voor elke twee getallen zo. Neem maar 4 en 5.

Kun je andere *getalparen**** vinden waarvan het product deelbaar is door de som?

* De omtrek van de aarde, gemeten langs de evenaar, is 40.000 km.

** Zie opgave 1 als je niet weet wat 'deelbaar' betekent.

*** Een getalpaar is een tweetal getallen, zoals 3 en 6.

10 Egyptisch vermenigvuldigen

Meer dan 3000 jaar geleden, in het oude Egypte, moesten de mensen soms ook vermenigvuldigen. Als iemand 12 kamelen wilde kopen en elke kameel kostte 125 geldstukken, dan wilde een Egyptenaar natuurlijk weten hoeveel hij moest betalen. Die Egyptenaren konden niet vermenigvuldigen zoals wij, maar ze konden wel verdubbelen en optellen. Ze bedachten nu een handige manier om vermenigvuldigingen als 12×125 te berekenen:

1	125		
2	250		
4	500	>	500
8	1000	>	1000
12			1500

Probeer op de Egyptische manier 27×134 berekenen. Kun je op deze manier alle vermenigvuldigingen maken die je maar bedenken kunt? Zeker weten?



11 Kwadraat x priem

Het jaartal 1996 kun je *ontbinden** in 4×499 . Ga maar na.

(Uit je hoofd: $4 \times 500 = 2000$; 4×499 is 4 minder dan 2000, dus 1996.)

Het ene getal, 4, is een kwadraatgetal, want $4 = 2 \times 2$ (het kwadraat van 2). En 499 is een priemgetal, want dat kun je alleen maar delen door 1 of door 499 zelf.

Vind nog zo'n jaartal in de twintigste eeuw dat je kunt ontbinden in kwadraat x priem.

Voor welk jaartal hoef je het minst ver terug?

Welk jaartal is het volgende?

12 Palindroom

Weet je wat een palindroom is? Een woord als 'kok' noemt men een palindroom, en ook 'pap' en 'lepel' en 'rotor'. En ook 'parterretrap'. Dat is een heel mooi palindroom, is het niet? En wat vind je van 'levensnevel'? Je kunt nu wel bedenken wat een palindroom-datum is. Bijvoorbeeld

6-9-96 (6 september 1996) of 3-2-23 (3 februari 1923). Welke palindroom-data hadden we nog meer *in de afgelopen eeuw*? Als je de datum op een andere manier opschrijft (1 januari 2001 schrijf je dan als 01-01-2001) hebben wij in deze eeuw een hele mooie en bijzondere palindroom-datum gehad. Weet jij welke?

* Als je een getal ontbindt, splits je het op in een vermenigvuldiging.

13 Maak de sommen af

$$\begin{array}{rcl} ? & + & ? = 12 \\ + & & + \\ ? & + & ? = 17 \\ = & & = \\ 15 & & 14 \end{array}$$

Welke cijfers moet je invullen op de plaats van de vraagtekens? De som moet horizontaal en verticaal kloppen!

14 Rekentruc met dobbelstenen

Dit is een rekentruc om je vader, moeder, opa, oma, vriendje of vriendinnetje te verbazen. Je hebt twee dobbelstenen nodig. Natuurlijk moet je eerst zelf de truc uitproberen en begrijpen! Het gaat zo:

Werp met de beide dobbelstenen. Je gooit bijvoorbeeld met de ene 3 ogen en met de andere 6.

Voer dan de volgende stappen uit:

Stap 1	vermenigvuldig de worp van de eerste dobbelsteen met	$2 \times 3 = 6$
Stap 2	tel 5 op bij de uitkomst	$6 + 5 = 11$
Stap 3	vermenigvuldig deze nieuwe uitkomst met 5	$5 \times 11 = 55$
Stap 4	tel de worp van de tweede dobbelsteen erbij op	$55 + 6 = 61$

De laatste uitkomst is 61. Als je daar 25 vanaf trekt krijg je 36. Dat wordt geschreven met een 3 en een 6. Let op: dat zijn precies de aantallen ogen die we met de dobbelstenen gooiden! Hoe kan dat?

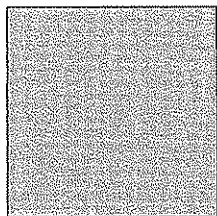
Gooi nu zelf met 2 dobbelstenen. Doe de stappen 1, 2, 3 en 4. Trek ook 25 van de laatste uitkomst af. Als je geen rekenfouten maakt, krijg je weer een getal dat bestaat uit de twee dobbelsteenworpen.

Klopt het altijd? Kun je dit verklaren?

Als je dit kunt verklaren, dan kun je hiermee anderen verbazen. Laat ze met twee dobbelstenen gooien zonder dat jijzelf de uitkomst ziet. Laat ze dezelfde berekeningen maken en jou de uitkomst van stap 4 vertellen. Jij trekt dan 25 van de uitkomst af en weet wat ze gegoooid hebben. Veel succes!

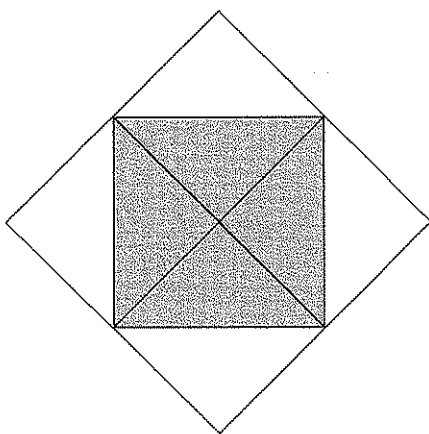
18 Vierkant

Hieronder zie je een vierkant.



De lengte van de zijden van dit vierkant is 1 meter, dus de oppervlakte is $1\text{ m} \times 1\text{ m} = 1\text{ m}^2$.

Met de diagonalen in het vierkant erbij, is het niet moeilijk om een groter vierkant om het eerste vierkant te tekenen:



Leg uit dat de oppervlakte van het grote vierkant 2 m^2 is.

Natuurlijk wil je nu ook weten hoe lang de zijde van dat grote vierkant is. Met een liniaal kun je dat opmeten, maar dan moet je wel eerst het grote vierkant op ware grootte tekenen. Zo'n groot stuk papier heb je vast niet bij de hand! Maar je kunt de lengte van de zijden van dat grote vierkant ook *schattend berekenen*. Je weet immers dat de oppervlakte 2 m^2 is.

Mark en Nora hebben de lengte berekend. Mark kreeg als uitkomst 1,4 m en Nora 1,5 m. Wie heeft er gelijk? Hoe weet je dat?

Je hebt wel ontdekt dat allebei de uitkomsten niet precies goed zijn. De uitkomst van Mark is te klein en die van Nora te groot. Wie van de twee heeft de beste schatting? Zeker weten?

Kun jij een betere schatting vinden? Hoe doe je dat?

19 A4-papier

Voor dit probleem heb je een aantal blaadjes papier (A4*) nodig. De opdracht is: leg met zo weinig mogelijk velletjes A4 een oppervlakte van precies één vierkante meter.

Hoe kun je uitleggen dat het wel zal lukken, zonder het echt te doen?

20 Telefoonnummers

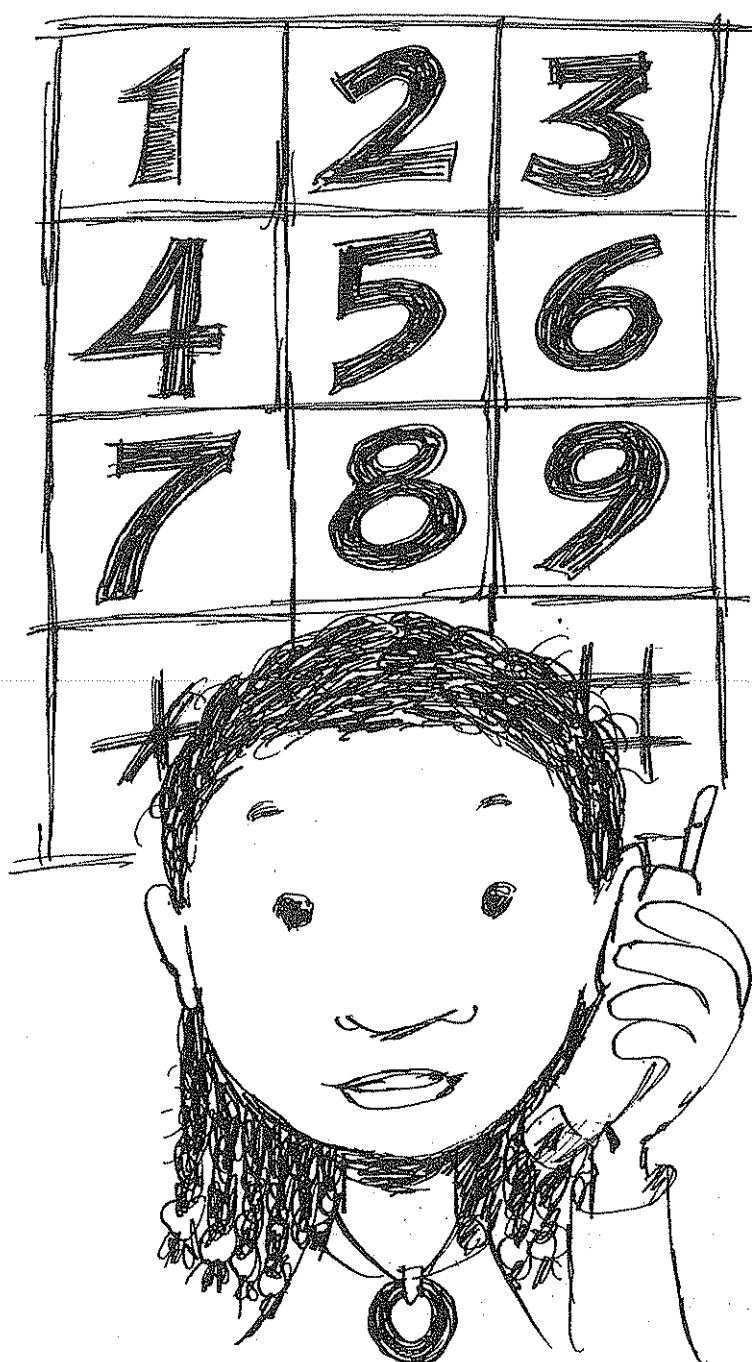
Ik was laatst op het eiland St. Maarten. Daar hebben ze telefoonnummers van vijf cijfers. Bijvoorbeeld: 23821. Blijkbaar zijn die vijf cijfers genoeg om iedereen aan een eigen telefoonnummer te helpen.

Hoeveel verschillende telefoonnummers kunnen er met vijf cijfers gemaakt worden?

* De maten van een A4-blaadje zijn 210 mm bij 297 mm.

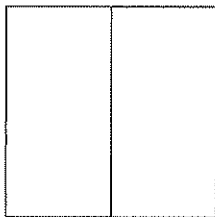
In Nederland bestaat elk telefoonnummer uit tien cijfers. Drie of vier cijfers voor het netnummer en dan zeven of zes cijfers voor het abonneenummer.

Hoeveel verschillende telefoonnummers kun je zo maken? Bedenk wel dat elk nummer met een nul begint, maar dat het tweede cijfer nooit een nul is!

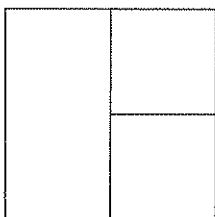


21 Vierkant verdelen

Een vierkant in twee gelijke stukken verdelen is niet moeilijk. Bijvoorbeeld zo:

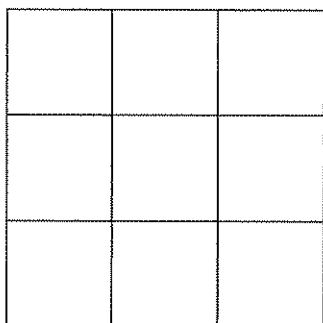


Als je één helft weer in twee gelijke stukken verdeelt krijg je een kwart vierkant:



Na hoeveel keer in twee gelijke stukken verdelen (halveren) krijg je een vierkant met een oppervlakte die meer dan 100 keer zo klein is als het vierkant waar we mee begonnen?

22 Magisch vierkant



Probeer in de hokjes van dit vierkant de getallen van 1 tot en met 9 zo in te vullen dat de sommen van de drie getallen in elke rij en in elke kolom en op elke diagonaal* gelijk zijn.

- * Een diagonaal is een rechte lijn die gaat van het ene hoekpunt naar het schuin daar tegenover liggende hoekpunt.

Kun je uitleggen waarom die sommen allemaal 15 moeten zijn?
Kun je ook uitleggen waarom het getal 5 in het midden moet staan?

23 Een vreemde optelsom

$$\begin{array}{rcccc} F & O & R & T & Y \\ & & T & E & N \\ & & T & E & N & + \end{array}$$

S I X T Y

Verschillende letters stellen hier verschillende cijfers voor.
Welke cijfers moet je voor de letters invullen zodat de optelling klopt?
Schrijf ook op hoe je het hebt gevonden.

24 Delen door 7 op je zakrekenmachine

Als je $1 : 7$ berekent met je rekenmachine, komt er 0,1428571 in het venster.
Eigenlijk is dat niet het precies juiste antwoord. Hoe kun je dat laten zien?
Zou je een manier kunnen uitvinden om het achtste cijfer achter de komma door de rekenmachine te laten bepalen?

'1 : 0 is flauwekul'

Dat leerden de kinderen vroeger in het voortgezet onderwijs. Als je wilt weten wat daarmee bedoeld werd, moet je maar eens 1 : 0 op je zakrekenmachine uitrekenen.

In het venster verschijnt: 'Error'*.

Kun je uitleggen wat er hier aan de hand is?

25 De snelweg naar 0

Je mag alleen maar aftrekken en delen. En je mag alleen maar gebruik maken van getallen van 2 cijfers die je zelf kiest.

Begin met 75456, kies je tweecijferige getallen en probeer in zo weinig mogelijk stappen naar (precies) 0 te komen.

Probeer het ook met het begingetal 20412.

Bedenk zelf een begingetal en ga zo snel mogelijk naar 0.

Bedenk nu een begingetal waarvan je weet dat jij (met bepaalde tweecijferige getallen) heel snel naar 0 kunt komen.

17

26 Van kommagetal naar gewone breuk

Heb je wel eens een kommagetal gemaakt van een gewone breuk? Neem bijvoorbeeld de gewone breuk $\frac{1}{98}$. Met je rekenmachine vind je bij 1 : 98 het kommagetal 0,010204.

Nou ja, een rekenmachine schrijft dat met een punt (in het Engels: decimal point) 0.010204. En nog wat, de rekenmachine kan niet altijd een precies antwoord geven, omdat er hoogstens 8 cijfers in het scherm passen.

Bij de gewone breuk $\frac{1}{3}$ vind je 0,333333. Bij $\frac{1}{9}$ dan natuurlijk 0,111111.

Waarom 'natuurlijk'?

* 'Error' betekent 'fout' of 'je vraagt me iets wat ik niet kan'. Soms staat er geen 'error' maar alleen de letter E.

Veel lastiger is om bij een kommagetal de gewone breuk terug te vinden. Maar soms kun je geluk hebben.

Welke gewone breuk hoort bij het kommagetal 0,5555555?

Welke breuk bij 0,25? En 0,125? En 0,625?

Welke bij 0,020408?

Tip Denk aan $\frac{1}{98}$.

Hoe kun je controleren of je het goed hebt?

27 De rij afmaken

Vind de drie volgende getallen in de rij

0 1 4 10 20 35

Tip Kijk naar de verschillen van de verschillen.

En vind ook de twee volgende getallen in de rij

7 30 99 306

Tip Net iets anders als hier boven.

28 Achtland

In Achtland heeft iedere bewoner vier vingers aan elke hand, dus samen acht vingers. Ze hebben in Achtland ook maar acht cijfers: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 en 7.

Kun je bedenken met welke getallen ze in Achtland verder gaan na 7?

Bedenk ook maar hoe jij die getallen kunt schrijven.

Ze maken ook sommen in Achtland. Bijvoorbeeld $2 + 3 = 5$ en $3 + 4 = 7$ en $3 + 5 = 10$. In Achtland zeggen ze tegen het getal 10 'acht'. En tegen 11 zeggen ze 'acht-een'.

Nu jij:

$$4 + 7 =$$

$$7 - =$$

$$10 - 3 =$$

Welke tafels van vermenigvuldiging moeten de Achtlandse kinderen volgens jou leren? Hoezo?



29 Millennium

Neem je verjaardag in 1999. Ga uit van het tijdstip 0 uur 0 min. en 0 seconden. Dat was dus precies aan het begin van je verjaardag. Hoeveel seconden duurde het vanaf dat moment tot aan het precieze begin van het jaar 2000? Dat is dus op 1 januari 2000, om 0 uur, 0 minuten en 0 seconden. Je mag ook zeggen: Dat is op 31 december 1999, om 24 uur, 0 minuten en 0 seconden.

Opmerking: Je was hoogstwaarschijnlijk niet precies op dat tijdstip jarig.

30 Delen door 9

$$15 : 9 = 1 \text{ rest } 6$$

$$23 : 9 = 2 \text{ rest } 5$$

$$34 : 9 = 3 \text{ rest } 7$$

Als je deze uitkomsten bekijkt, dan zie je dat de rest steeds gelijk is aan de som van de cijfers van het getal dat door 9 gedeeld wordt. Kijk maar.

Klopt dit ook met andere getallen? Klopt het soms altijd?

En als het een keer niet klopt, is er dan een mouw aan te passen?

31 De tafel van 9 op je vingers

Een recept om 4×9 met je vingers uit te rekenen:

- 1 Steek je beide armen vooruit en strek je vingers.
- 2 Nummer van links af je vingers. Vinger nummer 4 buigen. De uitkomst kun je dan zo van je vingers aflezen.

Gaat dit altijd op? Kun je dit uitleggen?

32 Priemgetallen

De getallen 2, 3, 5, en 7 noemen we priemgetallen*.

Welke andere priemgetallen kun je nog meer onder de 100 vinden? Zorg dat je er geen een vergeet!

Ben je zeker dat je ze allemaal hebt gevonden? Waarom?

Iemand beweert: Elk even getal dat groter is dan 2 kun je schrijven als de som van twee priemgetallen. Kijk maar:

$$4 = 2 + 2$$

$$6 = 3 + 3$$

$$8 = 3 + 5$$

$$10 = 3 + 7$$

Gaat deze bewering op voor alle even getallen onder de 100? Zeker weten?

33 Breuken

Als je 1 door 2 deelt, krijg je het antwoord 0,5. $1 : 3$ geeft: 0,33333. Eigenlijk is dit een uitkomst met een *oneindig*** lange staart van alleen maar drieën. We noemen dit een *repeterende**** breuk en schrijven dit zo: $0,\overline{3}$ (3 met een streepje erdoor). $1 : 4$ geeft een *eindig* lange staart: 0,25; eigenlijk dus een korte staart. $1 : 7$ geeft weer een repeterende breuk: 0,142857142857142857. We schrijven dit zo: $0,\overline{142857}$. Als je de uitkomsten van $1 : 3$ en $1 : 7$ met elkaar vergelijkt, dan zie je dat de repeterende staart uit één of meer verschillende cijfers kan bestaan.

Welke gewone breuken groter**** dan $\frac{1}{25}$ geven een repeterende breuk?

Welke van die breuken geeft een staart met de meeste verschillende cijfers?

Tip Gebruik je rekenmachine.

* Een priemgetal is een getal dat alleen deelbaar is door 1 én door zichzelf. 11 is dus ook een priemgetal.

** Oneindig is een echt wiskundig begrip. In dit geval betekent het dat er geen eind aan de staart komt.

*** Een ander woord voor repeteren is herhalen.

**** Een gewone breuk is er een met zo'n breukstreep, te onderscheiden van een decimale breuk of kommagetal.

De breuk $\frac{1}{20}$ is groter dan de breuk $\frac{1}{25}$!

34 Rekenmachine

Een zakrekenmachientje is een handig instrument. Je kan er snel en foutloos mee rekenen. Vervelend is dat als zo'n rekenmachientjes een uitkomst geeft, je de getallen waarmee je hebt gerekend niet meer kunt zien. Zo deelde Annemiek op haar rekenmachine twee getallen onder de 100 op elkaar. Ze kreeg toen als uitkomst: 7.7272727.

Wel een mooie uitkomst, maar Annemiek wist niet meer welke getallen ze had ingetoetst! Kun jij die getallen terug vinden?? Hoe weet je zeker dat je de goede getallen hebt?

35 Drie Poolse soldaten

Drie Poolse soldaten zijn een avondje uit geweest en beseffen opeens dat ze om 22.00 uur in de kazerne terug moeten zijn. Als ze te laat komen moeten ze de hele week op wacht staan, en daar hebben ze geen zin in!

Ze hebben één motorfiets met plaats voor de bestuurder en één medepassagier. De snelheid van de motor is 75 km/u. De afstand naar de kazerne is 45 kilometer en de klok wijst precies 20.20 uur aan. Als ze moeten lopen, gaan ze met een gemiddelde snelheid van 5 km/u. Hoe kunnen de drie soldaten op tijd terug zijn in de kazerne?

36 Wegpakken

Met je vriendje kun je het volgende spelletje spelen. Het enige dat je nodig hebt zijn 9 lucifers. Blokjes, kroonkurken, muntjes of iets dergelijks kan ook.

Om beurten pakken jij en je vriendje één of twee lucifers weg. Wie de laatste lucifer(s) wegpakt, heeft gewonnen. Je vriendje zegt: 'Als ik mag beginnen, win ik altijd!'

Heeft hij gelijk? Weet je dat zeker?

37 Raad-mijn-getal

Misschien ken je het spelletje 'Raad-mijn-getal'. Iemand neemt een getal kleiner dan 100 in gedachten en de anderen moeten dit getal raden. Ze mogen alleen vragen stellen als 'Is het groter dan ...?' of 'Is het kleiner dan ...?'. Er mag alleen met ja of nee geantwoord worden.

Om het moeilijker te maken neemt de spelleider een getal kleiner dan 1000 in gedachten en mogen er niet meer dan 20 vragen worden gesteld.

Kan elk getal zo worden geraden? Zeker weten?

38 Vierkanten op het schaakbord

Het schaakbord is vierkant en het bestaat uit 64 vierkante velden.

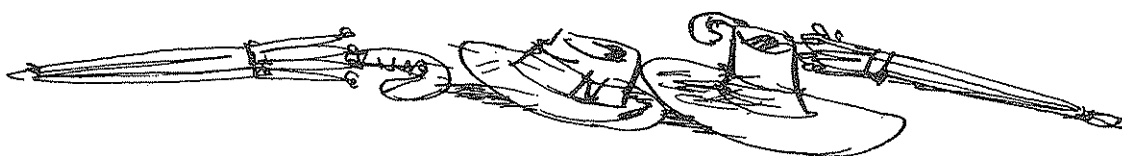
Hoeveel andere vierkanten kun je op het schaakbord nog meer vinden?

Hoeveel vierkanten zijn het er totaal?

Hoe zit dat met een dambord (10 x 10 velden)?

39 Paraplu's en hoeden

In een winkel verkopen ze paraplu's en hoeden. Twee paraplu's en één hoed kosten samen 80 euro. Twee hoeden en één paraplu kosten samen 76 euro. Hoeveel moet je in die winkel betalen voor één paraplu en één hoed?



40 Wie kent het getal π niet?

De Nederlander Adriaen Anthonisz (ca. 1543 – 1620) was burgemeester van Alkmaar en een uitgeslagen type. Hij kende de waarden van het getal π die Archimedes ($\frac{22}{7}$) en Ptolemeus ($\frac{377}{120}$) hadden bedacht en zonder al te veel moeite en zonder nog meer veelhoeken te tekenen, gaf hij als waarde voor $\pi = \frac{355}{113}$.

Als we de benadering van Adriaen Anthonisz modern noteren, vinden we $\pi = 3,141592$.

Dat is een prachtige benadering en dan te bedenken dat Adriaen deze benadering in een mum van tijd uit zijn hoofd berekende! Wie ziet hoe hij dat gedaan heeft?

Opmerking: In het leerlingboek 'Doordenkertjes' (dat hoort ook bij de band van Bolleboos rekenen / wiskunde) kun je in opgave 22 rekenen met het getal π !

- * Het getal π (spreek uit: pi) is een verhoudingsgetal dat rekenaars en wiskundigen al minstens 2000 jaar bezig houdt. Het geeft aan hoe de omtrek van een cirkel zich verhoudt tot de middellijn. Het blijkt een kommagetal te zijn met een oneindig lange staart, maar geen repeterende breuk (zie ook opgave 33).
-
-
-

Handwriting practice lines consisting of six horizontal lines.



41 Roostervierkanten en driehoeken

Teken een roostervierkant van 5 bij 5. Teken daarbinnen een driehoek zó dat de hoekpunten van de driehoek samenvallen met roosterpunten op het vierkant en waarbij geen van de zijden van de driehoek samenvalt met het vierkant.

Ben je in staat zo'n driehoek te tekenen die groter is dan de helft van het roostervierkant?

Wat is de grootste driehoek?

En hoe zit dat met roostervierkanten van 8x8, 10x10 en 20x20 bijvoorbeeld?

Kun je een algemene regel opstellen voor de grootste driehoek?

42. 1 tot en met 9

Van de cijfers 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 en 9 kun je drie getallen van elk drie cijfers maken. Bijvoorbeeld 123, 456 en 789.

Maak nu van de cijfers 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 en 9 drie getallen zodat het tweede getal precies 2 keer zo groot is als het eerste getal en het derde getal precies 3 keer zo groot is als het eerste. Je mag elk cijfer precies één keer gebruiken.

Er zijn drie verschillende oplossingen. Kun je ze allemaal vinden? Weet je nu zeker dat er niet meer dan drie verschillende oplossingen zijn?

43 Vermenigvuldigen en delen

Voor dit probleem heb je nodig: potlood, papier en zakrekenmachine.

Neem drie opeenvolgende getallen, bijvoorbeeld 2, 3 en 4. Als je die met elkaar vermenigvuldigt, krijgt je: $2 \times 3 \times 4 = 24$. De uitkomst is deelbaar door 6,

want $24 : 6 = 4$. Ook de uitkomst van $7 \times 8 \times 9$ is deelbaar door 6. Ga maar na.

Wanneer je drie opeenvolgende getallen met elkaar vermenigvuldigt, is de uitkomst dan altijd deelbaar door 6? Hoe kun dat zeker weten? Welke regel geldt wanneer je vier opeenvolgende getallen met elkaar vermenigvuldigt?

44 In het kabouterbos

Een groot aantal hele slimme kabouters zit samen in een kabouterbos. Ze kunnen niet met elkaar praten en ook geen tekens aan elkaar geven. Elke kabouter heeft een rode of een groene muts op, maar hij kan niet zien welke kleur de muts is die hij zelf op heeft. De boosaardige koning van de kabouters woont buiten het bos in een groot kasteel. Op een dag gaat hij naar het bos en spreekt de kabouters toe: 'Ik wil dat alle kabouters met een rode muts één voor één uit het bos tevoorschijn komen. Als de laatste kabouter met een rode muts naar buiten komt, steek ik de vlag uit en mogen jullie allemaal verder doen wat je wilt. Maar als er een groene muts verschijnt, krijgen alle kabouters werkstraf.'

Even later gaan de kabouters met een rode muts één voor één naar buiten.

Snap je hoe die slimme kabouters dat voor elkaar kregen?

45 Enen

$$1 + 11 = 12$$

$$1 + 11 + 111 = 123$$

Bij welke som komt er 123456789 uit?

46 123456789

Wat moet je bij 123456789 optellen om een getal te krijgen waarin de cijfers 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 en 9 elk één keer voorkomen?

47 Miljoen

a Is 1 miljoen seconden meer of minder dan 12 dagen?

b Is 1 miljoen minuten meer of minder dan 2 jaar?

Is 1 miljoen uur meer of minder dan een mensenleven?

48 Waterverbruik

Een klein gezin verbruikt 100 m³ water per jaar. Voor de WC-spoeling is gemiddeld per dag 70 liter water nodig. Hoeveelste deel is dat van het jaarverbruik?

49 Bomen in een kring

Vier bomen staan in een cirkel rond een vijver die ook de vorm van een cirkel heeft. De lengte van die cirkel is 60 meter. De afstand tussen de bomen, gemeten langs de cirkel, wordt steeds verdubbeld. Hoe groot is de afstand tussen de bomen die het dichtst bij elkaar staan?

50 De eerste 1000

De eerste duizend getallen zijn 1 tot en met 1000. Hoeveel van deze getallen kun je delen door 6 en 9?

51 Geheimschrift

Als $P\blacktriangle$ eigenlijk $P + 1$ betekent ($3\blacktriangle$ is dus $3 + 1 = 4$) en $P\blacktriangledown$ betekent $P - 1$ ($7\blacktriangledown$ is gelijk aan $7 - 1 = 6$), dan is $4\blacktriangle \times 3\blacktriangledown =$

- a $9\blacktriangledown$
- b $10\blacktriangle$
- c $11\blacktriangledown$
- d $12\blacktriangle$
- e $13\blacktriangledown$

En wat komt er uit $(4\blacktriangle \times 3)\blacktriangledown$?

Maak met 3, 4, x, $\blacktriangledown$ en $\blacktriangle$ een zo groot mogelijke uitkomst. Elk symbool precies 1 keer gebruiken!

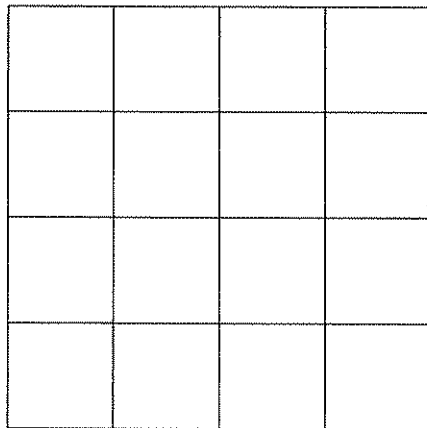
Wat betekent $9\blacktriangle\blacktriangle$?

Maak zelf ook eens een paar van dit soort opgaven.

52 Palindroom

Het jaar 2002 is een 'palindroomjaar'. Dat was het jaar 1991 ook. Hoeveel jaar zit er tussen 2002 en het eerstvolgende palindroomjaar?

53 Euro's op een bord



Je wilt op dit 4 x 4-bord zoveel mogelijk eurocenten neerleggen. Maar op elk vakje mag maar 1 eurocent liggen. En op elke rij, horizontaal, verticaal en diagonaal, *mogen er niet meer dan drie liggen*. Wat is het grootste aantal eurocenten dat je op die manier op het bord kunt neerleggen?

Kan het ook op verschillende manieren? Hoeveel?

54 Zeven miljard waterdruppels

Stel je voor dat er ergens op de wereld 7.000.000.000 (7 miljard) waterdruppels bijeen zijn. Je wilt ze allemaal bij elkaar in een vierkante (kubus) glazen bak opbergen. Die waterdruppels zijn 49 mm^3 (kubieke millimeter). Hoe groot moet dan

de hoogte, de breedte of de diepte van die glazen bak zijn?

- a 7 m
- b 49 cm
- c 7 cm
- d 49 m
- e 7 km

55 Som van de cijfers is 6

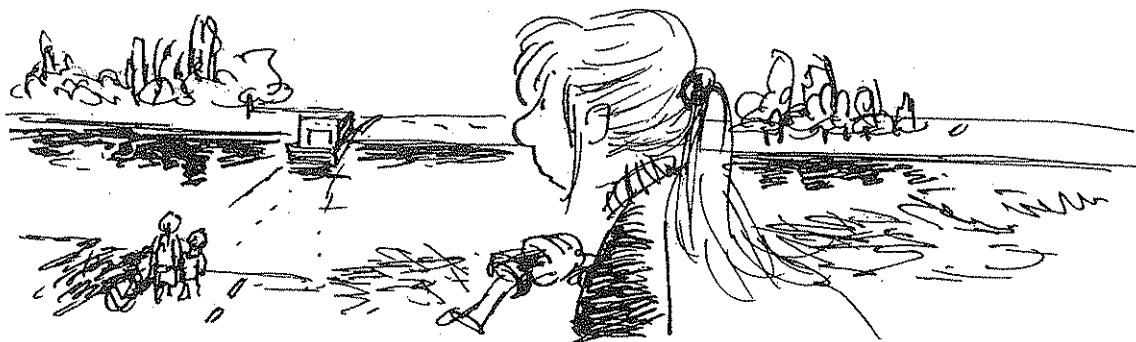
Je zoekt gehele getallen waarvan de som van de cijfers (alle cijfers optellen) gelijk is aan 6. Zoals 15 (want $1 + 5 = 6$) en 132. En ook 6 zelf natuurlijk. De vraag is hoeveel van die getallen er zijn te vinden die kleiner zijn dan 1000.

- a 28
- b 19
- c 111
- d 18
- e 27

56 Veerpont

Maria wil met de pont naar de overkant van de rivier. Ze weet dat ze gepast moet betalen en ze weet ook dat het kaartje meer dan 1 euro en minder dan 3 euro kost. Ze doet thuis zo weinig mogelijk munten in haar portemonnee waarmee ze zeker gepast kan betalen. Ze kan kiezen uit munten van 1 cent, 2 cent, 5 cent, 10 cent, 20 cent, 50 cent, 1 euro en 2 euro. Hoeveel munten heeft ze bij zich?

- a 6
- b 7
- c 8
- d 9
- e 10



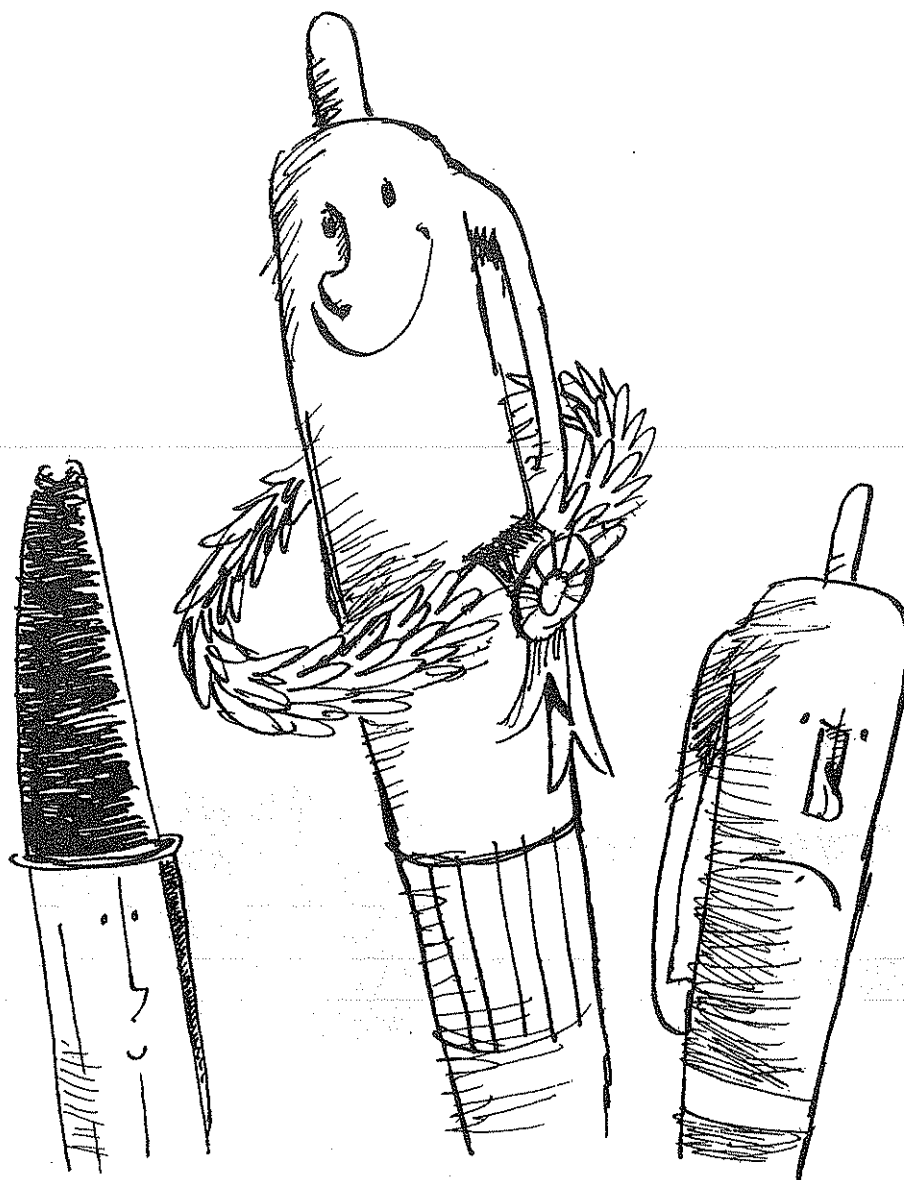
57 Tussen 100 en 999

Er zijn getallen tussen 100 en 999 waarvan de cijfers van groot naar klein gaan. Zoals bij 321 en 954, maar niet bij 322. Hoeveel van die getallen zijn er?

58 Ballpoints

Een winkel koopt 40 ballpoints van 3 verschillende soorten voor samen 40 euro. De ballpoints kosten 25 eurocent, 1 euro of 5 euro. Er worden meer ballpoints van 1 euro gekocht dan van 5 euro. Hoeveel ballpoints van 25 eurocent werden er gekocht?

- a 20
- b 12
- c 24
- d 16
- e 18



59 Deelbaar door 11

Kies een getal van twee cijfers. Bijvoorbeeld 34. Als je de cijfers van dit getal verwisselt, krijg je 43. Bij elkaar opgeteld: $34 + 43 = 77$. Je ziet dat je 77 kunt delen door 11, want $77 : 11 = 7$.

Kies andere getallen van 2 cijfers. Verwissel de cijfers en tel de getallen op. Is de uitkomst altijd deelbaar door 11?

Kun je uitleggen hoe dat komt?

Neem ook eens een getal van 3 cijfers, bijvoorbeeld 254. Verwissel weer de cijfers. Je krijgt dan 452. Is de som weer deelbaar door 11?

En hoe zit dat als je een getal met 4 cijfers neemt?

60 Zakrekenmachine

Een rekenmachine laat niet alles zien! Als je met je machientje uitrekent $1 : 3$ krijg je als uitkomst 0.3333333. Sommige grotere zakrekenmachines laten nog meer cijfers van de uitkomst zien. Bijvoorbeeld: 0.333333333. Maar ook het venster van zo'n grote zakrekenmachine is te klein om alle cijfers van de uitkomst te laten zien! Reken $1 : 3$ ook maar eens uit met potlood en papier. Je krijgt net zoveel drieën als je wilt. Het houdt nooit op!

Iemand rekt uit $1 : 6$ op twee zakrekenmachientjes. De eerste geeft als uitkomst: 0.1666666. Het tweede machientje geeft: 1.1666667.

Welke machine heeft volgens jou gelijk?

Daarna rekende hij $1 : 7$ uit op een zakrekenmachientje. Hij kreeg 0.1426571.

Natuurlijk wilde hij weten welke cijfers de machine niet liet zien. Kun jij hem helpen?

Tip Als je er niet uitkomst, kijk dan nog eens terug naar probleem 33.

61 Voetbaltoernooi

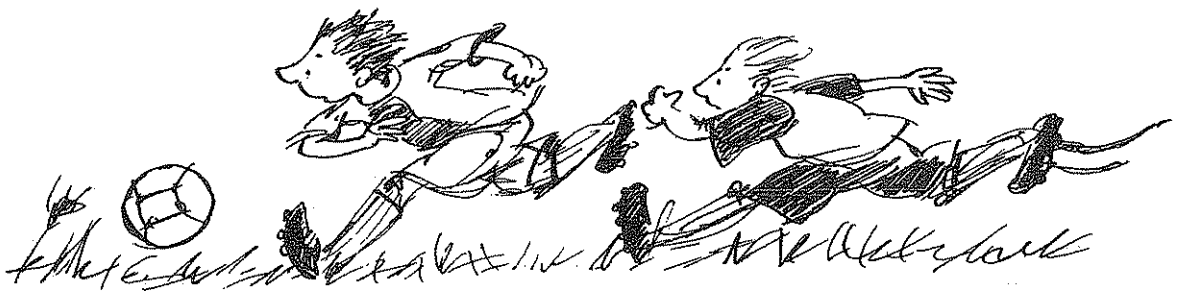
De voetbalclub Blauw-Geel organiseert een toernooi met als prijs een beker voor de winnaar. Behalve een team van Blauw-Geel doen ook de voetbalclubs Actief en Caesar met elk één team mee.

Hoeveel wedstrijden moeten er minstens gespeeld worden voordat de beker aan het beste team uitgereikt kan worden?

Kunnen alle teams die volgens het 'halve competitieschema' spelen gelijk eindigen?

Wat moet de wedstrijdleider dan doen?

Kunnen alle teams die volgens het 'hele competitieschema' spelen, gelijk eindigen? Stel dat er vier teams aan het toernooi meedoen, behalve Blauw-Geel, Actief en Caesar doet ook een elftal van Tikkie Terug mee. Er wordt een halve competitie gespeeld. Hoeveel wedstrijden worden er gespeeld? Maak een wedstrijdschema.



62 Eredivisie

In ons land doen 18 voetbalclubs mee aan de eredivisie. PSV, Ajax, Feyenoord en nog 15 andere clubs. Er wordt een hele competitie gespeeld: elke club speelt tegen alle andere clubs een thuis- en een uitwedstrijd.

De winnaar van een wedstrijd krijgt 3 punten, bij gelijkspel krijgen beide clubs 1 punt en de verliezer van een wedstrijd krijgt 0 punten. De club met de meeste punten is kampioen.

Hoeveel wedstrijden worden in deze voetbalcompetitie gespeeld?

63 Wereldkampioenschap

Aan een toernooi om het wereldkampioenschap doen teams uit 16 landen mee. Er is afgesproken dat het toernooi niet langer dan 20 dagen mag duren. En ook vindt men dat elk team na elke wedstrijd minstens 1 dag rust moet krijgen.

Televisiemaatschappijen willen zoveel mogelijk wedstrijden uitzenden, maar niet meer dan 2 wedstrijden op een avond.

Op het eind van het toernooi moet een finale worden gespeeld.

Maak een wedstrijdschema dat aan deze eisen voldoet.

64 Diagonalen

In een vierhoek kun je 2 diagonalen tekenen. Probeer maar. Een vijfhoek heeft 5 diagonalen. Teken dit zo nodig om het zelf te zien.

Hoeveel diagonalen heeft een zeshoek? En een zevenhoek? Kun je het ook vinden zonder te tekenen?

Kun je *uitrekenen* hoeveel diagonalen een twaalfhoek heeft?

65 Getallen maken

Zet de cijfers 2, 5 en 7 elk op een kaartje. Nu kun je getallen maken. Bijvoorbeeld:

2	5	7
---	---	---

Hoeveel getallen van twee cijfers kun je maken met de cijfers 2, 5 en 7?

3	6	8	9
---	---	---	---

Hoeveel getallen van drie cijfers kun je maken met deze vier cijfers?

66 Hoe verder?

Hieronder zie je enkele getalrijen. Van elke rij weten we alleen een paar getallen aan het begin.

5 25 125

2 8 16

1 1 2 3 5

Bedenk hoe deze rijen verder kunnen gaan. Schrijf de volgende twee getallen van elke rij op.

67 Handig rekenen

Soms kun je sommen handig (dat is snel en zonder fouten) uitrekenen. Probeer zelf maar.

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 =$$

$$1 + 2 - 3 + 4 - 5 + 6 - 7 + 8 - 9 =$$

$$996 + 997 + 998 + 999 + 1000 + 1001 + 1002 + 1003 + 1004 =$$

$$996 + 997 - 998 + 999 - 1000 + 1001 - 1002 + 1003 - 1004 =$$

68 Honderd

Met twee startgetallen, bijvoorbeeld 5 en 7, kun je op een bepaalde manier een rijtje van vijf getallen maken.

5	7	12	19	31
---	---	----	----	----

Zie je hoe dat maniertje is?

Als je twee andere startgetallen neemt, krijg je met hetzelfde maniertje een ander rijtje van vijf:

9	14	23	37	60
---	----	----	----	----

Kun je twee startgetallen vinden waarmee je zo als vijfde getal 100 krijgt?

Als je op zoek gaat naar andere oplossingen dan die je al had gevonden, kun je

komen tot een totaal van zeven verschillende. Hoe ver kom jij? En hoe pak je het aan?

69 Kubus

Denk aan een grote kubus gemaakt van kleine, houten kubusjes. Als je naar een zijvlak van de kubus kijkt, zie je 64 vlakjes. Dat zijn dus de zijvlakjes van 64 kleine kubusjes.

Hoeveel kleine kubusjes waren nodig om die grote kubus te bouwen?

37

Als je de buitenkant van de grote kubus rood verft en hem daarna – als de verf droog is! – uit elkaar haalt, hoeveel kleine kubusjes zijn er dan met:

3 rode zijvlakjes?

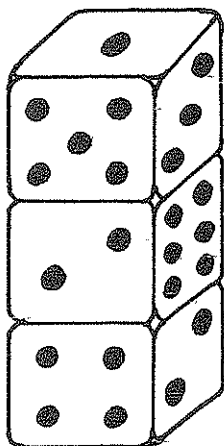
2 rode zijvlakjes?

1 rood zijvlakje?

0 rode zijvlakjes?

70 Dobbelstenen

Als je weet hoe de stippen op een dobbelsteen staan, kun je het volgende probleem oplossen.



Hoeveel stippen kun je niet zien als je rond om dit stapeltje van 3 dobbelstenen loopt?

71 Waar of niet waar?

- a Als je een even en een oneven getal bij elkaar optelt, is de uitkomst altijd oneven.
- b Als je twee oneven getallen met elkaar vermenigvuldigt, is de uitkomst altijd oneven.
- c Als je drie even getallen bij elkaar optelt, is de uitkomst altijd deelbaar door 6.
- d Als je een getal met als laatste cijfer 5 vermenigvuldigt met een ander getal, is het laatste cijfer van de uitkomst altijd 5.
- e Als je 3 opeenvolgende getallen met elkaar vermenigvuldigt is de uitkomst altijd deelbaar door 6.

72 Vierkant

Neem een blaadje A4 of een ander rechthoekig stukje papier.

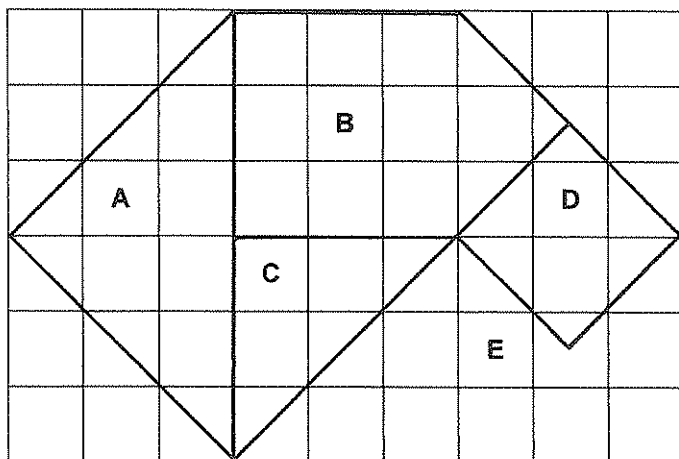
Vouw daarvan een vierkant.

En vertel dan waarom dat precies een vierkant moet zijn.

73 Oppervlakte op ruitjespapier

Hoe groot is de oppervlakte van de figuren A, B, C, D en E hieronder?

De oppervlakte van de hele figuur (een rechthoek) is $(9 \times 6 =) 54$ hokjes.

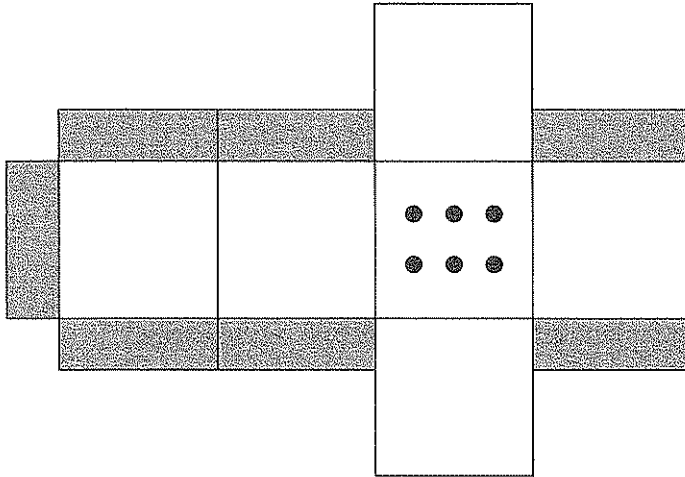


74 Puzzelvierkant

Een verrassing! Knip de stukjes A tot en met E uit opgave 73 uit, gebruik ze als stukjes van een legpuzzel en maak er een vierkant van. Vraag eerst even of je in dit boek mag knippen.

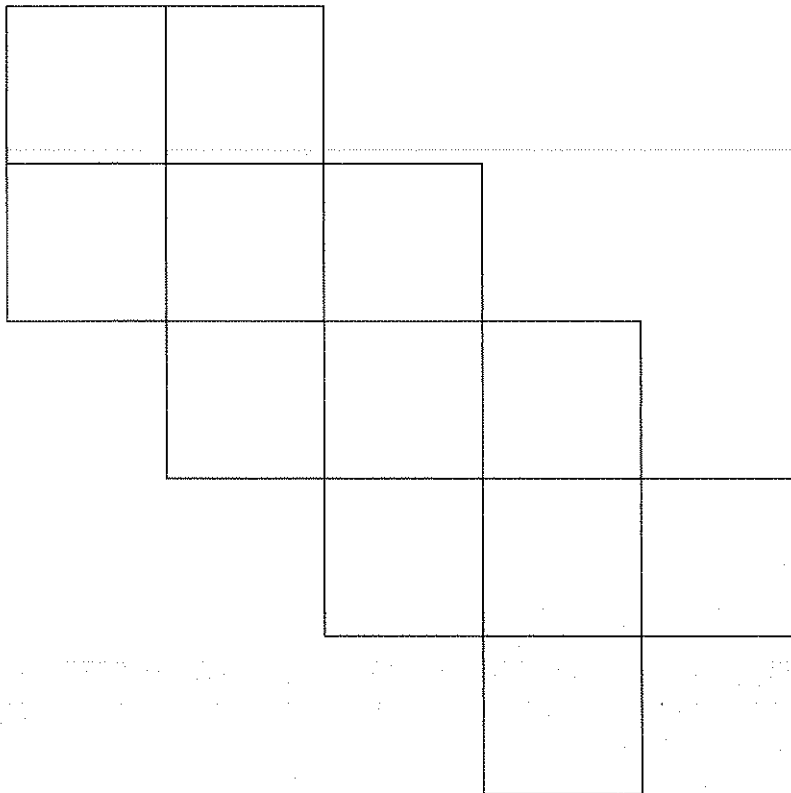
75 Bouwplaatje dobbelsteen

Je hebt in opgave 24 gezien hoe de stippen op een dobbelsteen staan. Hieronder zie je hoe je een kubus in elkaar kunt vouwen (bouwplaatje, de grijze vlakken zijn de plakrandjes). Zet voordat je gaat vouwen de stippen erop. Hoe ben je zeker van je oplossing?



76 Kubus vouwen

Knip de figuur hieronder uit (of maak eerst een kopie ervan, dan kan het boek heel blijven). Vouw er vervolgens een kubus van.



Schrijf op hoe je het gedaan hebt en wat je erbij hebt gedacht.

77 Het 24-spel (1)

Het 24-spel bestaat uit kaartjes met vier cijfers onder de tien, waarvan je met optellen, aftrekken, vermenigvuldigen en / of delen het getal 24 moet maken.

Elk cijfer precies één keer gebruiken!

Soms is dat heel gemakkelijk te zien, vaak ook is er meer dan één oplossing. Maar het is ook mogelijk dat je lang moet puzzelen en zelfs dat het helemaal niet kan.

Maar dat laatste kun je soms ook in één keer zien.

Neem bijvoorbeeld het kaartje met de cijfers 1, 2, 3 en 4.

$1 \times 2 \times 3 \times 4 = 24$. Klaar, maar zoek nog even naar een andere oplossing.

$1 + 2 + 3 = 6$; $6 \times 4 = 24$. Tweede oplossing.

Nog één: $4 + 2 = 6$; $1 + 3 = 4$; $6 \times 4 = 24$.

En er zijn nog meer oplossingen!

Op een ander kaartje staan de cijfers 2, 5, 6 en 8. Zoek zoveel mogelijk oplossingen!

78 Het 24-spel (2)

Maak een kaartje voor het 24-spel waarvan je zeker weet dat niemand een oplossing kan vinden. Je mag een cijfer meer dan één keer gebruiken.

Maak daarna een kaartje met vier verschillende cijfers waarvan je zeker weet dat niemand een oplossing kan vinden.

Maak tenslotte een kaartje met vier gelijke cijfers waarvoor wél een oplossing is te vinden.

84 Verjaardag

Peter is geboren op 28 februari 1990. Op zijn verjaardag in het jaar 2001 kreeg hij van zijn opa en oma een kaart waarop het precieze aantal dagen van zijn leeftijd stond.

Welk getal stond daarop?

85 Twintig miljoen

De leraar heeft op school verteld dat hij gisteren precies 20 miljoen minuten oud is geworden. Dat moest gevierd worden, vond hij.

Kan dat wel kloppen, die 20 miljoen minuten?

86 Groter, kleiner, precies

Met de cijfers 1, 2, 3, 7, 8 en 9 kun je twee getallen van drie cijfers maken.

Die twee getallen tel je dan op. Bijvoorbeeld:

$$\begin{array}{r} 271 \\ + 389 \\ \hline 660 \end{array}$$

Met welke twee getallen krijg je de grootste uitkomst (som)?

Met welke twee getallen krijg je de kleinste som?

Kun je ook twee getallen maken waarvan de som precies 1200 is? Vertel ook hoe je het gedaan hebt.

87 Vermenigvuldigen

Ik wil alle vermenigvuldigingen weten waar 6 uitkomt: 1×6 , 2×3 , 3×2 , 6×1 .

Dat zijn er vier. Maar eigenlijk zijn 6×1 en 1×6 niet echt verschillend, en 2×3

en 3×2 ook niet. Dus spreek ik maar af dat ik precies 2 vermenigvuldigingen heb gevonden bij 6, namelijk 1×6 en 2×3 .

Welke vermenigvuldigingen vind je bij 12?
En welke bij 48?

Je kunt zo'n lijstje met vermenigvuldigingen op een handige manier maken:

6	
1	6
2	3

12	
1	12
2	6
3	4

Maak die lijstjes voor de vermenigvuldigingen bij 24, 36, 72 en 100.

45

88 Delers

Het getal 12 heeft zes delers. Je ziet ze in het rijtje uit opgave 87:

12	
1	12
2	6
3	4

Je kunt 12 ook anders schrijven, door het getal te ontbinden in factoren.

Ontbinden is een soort opsplitsen. Dat gaat zo: $12 = 2 \times 2 \times 3$. Je kunt ook schrijven $12 = 1 \times 2 \times 2 \times 3$, maar die 1 laten we hier meestal weg. Kun je uit $12 = 2 \times 2 \times 3$ ook alle delers van 12 afleiden? Dat is niet moeilijk, je leest ze als het ware gewoon af: 2, 3, 2×2 , 2×3 en $2 \times 2 \times 3$. De laatste deler is het getal zelf, een beetje flauw dus.

In de wiskunde schrijft men het liefst zo kort mogelijk. Dat kan in het geval van 12 zo: $12 = 2^2 \times 3$. Snap je wat 2^2 hier betekent?

Kloppen de volgende ontbindingen:

$$18 = 2 \times 3^2$$

$$36 = 2^2 \times 3^2$$

$$56 = 2^3 \times 7$$

Wat zou 2^1 betekenen? Is $18 = 2^1 \times 3^2$ goed?

Getallen als 3^2 en 5^3 heten machten. Het kleine getalletje rechts bovenaan heet exponent. Waar staat de exponent voor? Met andere woorden: wat geeft de exponent aan?

Nu terug naar de delers van een getal. Het getal 12 had 6 delers (we tellen nu 1 wel mee, omdat we dan een mooie regel kunnen vinden). Dat aantal 6 is in verband te brengen met de exponenten in $12 = 2^2 \times 3^1$. Dat zijn dus 2 en 1. Zie je al iets? Ik denk het niet. We onderzoeken eerst nog wat meer getallen, hun aantallen delers en de bijbehorende exponenten. Neem het getal 36.

36	
1	36
2	18
3	12
4	9
6	6

De delers van 36 zijn: 1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18 en 36.

Het aantal delers van 36 is dus: 9.

De ontbinding van 36 is $2^2 \times 3^2$.

De exponenten zijn 2 en 2.

Het verband tussen exponenten (2 en 2) en aantal delers (9) is:

$$(2 + 1) \times (2 + 1) = 9.$$

Wat is nu die mooie regel?

Onderzoek of die regel ook waar is voor 250, 72 en 108.

Een moeilijke vraag: kun je uitleggen hoe het komt dat die regel klopt voor de getallen

$$6 = 2^1 \times 3^1 \text{ en } 12 = 2^2 \times 3^1?$$

89 Verrassing

Kies een getal dat kleiner is dan 100. Tel de cijfers bij elkaar op. Vermenigvuldig het antwoord met 11. Trek het eerste getal (dat je zelf hebt gekozen) ervan af. Verwissel beide cijfers van het laatst gevonden getal. Verrassing? Je hebt je eigen getal weer terug!

Voorbeeld: ik kies 43.

Optellen $4 + 3 = 7$

Vermenigvuldigen $11 \times 7 = 77$

Aftrekken $77 - 43 = 34$

Verwisselen 43

't Klopt!

Klopt dat altijd? Snap je hoe dat komt? Kun je het uitleggen?

90 Een spring-denkpuzzel



Je ziet een strook met 9 vakjes. Er liggen drie zwarte en drie witte fiches op.

De *spring*-opdracht luidt: zorg dat de zwarte fiches rechts en de witte fiches links komen te liggen. Maar houd je daarbij aan de volgende spelregels:

- Je mag maar één fiche tegelijk verplaatsen.
- Je mag zwarte fiches alleen naar rechts en witte alleen naar links verplaatsen.
- Je mag met een fiche op een ernaast gelegen leeg vakje springen of over een fiche van een andere kleur op een daarnaast gelegen leeg vakje springen.
- Je mag nooit over 2 of meer fiches springen.

48

De *denk*-opdracht is: hoeveel zetten (sprongen) zijn op z'n minst nodig om zwart en wit van kant te verwisselen?

()

()

()

()

