

de groep leerlingen die met van tevoren vastgestelde tussenpozen nieuwe typen sommen kregen aangereikt. Het onderzoek van Klein kan worden beschouwd als de voorloper op het ontwikkelingsonderzoek 'Met Sprongen Vooruit'. (Klein, A.S. (1998). *Flexibilization of mental arithmetic strategies on a different knowledge base: The Empty Numberline in a Realistic versus Gradual Program Design* (diss.) Utrecht: CD-B Press / Freudenthal Institute.)

Variaties en uitbreidingen

- Bespreken van oplossingen in de volgende les.
Door het individuele werk pas de volgende oefenles te bespreken, kunnen de leerlingen hun werkblad tussendoor afmaken. Bovendien heeft de leerkracht nu ruim de gelegenheid om het werk te analyseren. Ze krijgt hierdoor een indruk van de aanpakken van de leerlingen en kan zodoende zo optimaal mogelijk op hun behoeften ingaan.
- Werkblad O1 t/m O9.

9. Bijna-verdwijnsommen

Een bijna-verdwijnsom is een aftrekking waarvan aftrektal en aftrekker bijna even groot zijn, zodat er na de eraf-handeling 'niet veel overblijft' of 'bijna alles verdwijnt'. Een som als $62-61$ behoort hiertoe.

Doel

Leerlingen zien de relatie tussen optellen en aftrekken en kunnen de rekenstrategie van het aanvullende optellen toepassen.

Start

De relatie tussen optellen en aftrekken wordt expliciet gemaakt. Dit leerproces verloopt via een aantal stappen.

Stap 1

De leerkracht vraagt een bijna-verdwijnsom als $62-61$ op te lossen. Stel, hierop wordt het antwoord '1' gegeven. Dan bevestigt de leerkracht dit goede antwoord door de som als volgt te controleren: ' $62-61=1$, want $61+1=62$ '. Terwijl de leerkracht dit zegt, schrijft ze de som op het bord en tekent een relatieboogje van 61 naar 1.

$$62 - 61 = 1$$

De som wordt nu van rechts naar links gelezen. Dit is te vergelijken met het beeldje voor beeldje teruggdraaien van een film. Een klein detail hierbij is dat bij de controle het grootste getal voorop wordt gesteld. Dit is namelijk makkelijker en voor kinderen vormt het geen probleem. De verwisselingschap passen ze al geruime tijd toe.

Het kan wenselijk zijn de hierboven uitgebeelde relatie tussen aftrekken en optellen te verduidelijken met pijlentaal voordat je het boogje zet.

$$\begin{array}{r} -61 \\ 62 \overline{=} 1 \\ +61 \end{array}$$

Overigens, wanneer een kind een ander antwoord geeft dan 1, kan de leerkracht dit antwoord op dezelfde manier verifiëren als hiervoor geschetst.

Kenmerkend voor deze stap is dat de leerkracht de boogjesmethode gebruikt als strategie *achteraf*.



fragment: 'Introductie relatie optellen en aftrekken' (Bijna-verdwijnsommen)

Stap 2

Een volgende stap is nu om een iets lastigere bijna-verdwijnsom als $62-59$ te laten oplossen. Kinderen doen dit net als bij $62-61$ met een controle achteraf, zoals de leerkracht deed. Bij de bespreking van dergelijke opgaven wordt op het bord door middel van het boogje telkens de relatie tussen aftrekken en optellen benadrukt.

$$62 - 59 = 3$$

Kenmerkend voor deze stap is dat leerlingen de boogjesmethode gebruiken als strategie *achteraf*. Door de keuze van de getallen loont het om het boogje te gebruiken.

Leerlingen kunnen voor het eerst de boogjesmethode als strategie achteraf gebruiken als ze hun eigen producties voor Waku-waku moeten nakijken. Het idee hierachter is dat leerlingen vanuit sommen die ze al kennen en/of zelf hebben bedacht makkelijker de relatie tussen aftrekken en optellen begrijpen, dan wanneer deze relatie vanuit voor hen onbekende, moeilijke sommen wordt gelegd.



fragment: 'Eigen producties controleren' (Bijna-verdwijnsommen)

Stap 3

De laatste stap is dat leerlingen de boogjesmethode als rekenstrategie ook vooraf gebruiken. Dit kan bij een opgave als 62-59, maar ook bij een som als bijvoorbeeld 62-38. Bij de nabespreking komt deze handige werkwijze aan de orde. De leerkracht moedigt alle leerlingen aan ook 62-38 eens met een boogje op te lossen.

Leerlingen hanteren de boogjesmethode als strategie vooraf

$$62-59= \quad 62-38=$$

In onderstaande tabel zijn de beschreven stappen nog eens overzichtelijk weergegeven.

Stap	Plaatje
1: boogjesmethode als strategie achteraf door leerkracht	$62-61=1$ $\begin{array}{r} 62 \\ -61 \\ \hline 1 \end{array}$
2: boogjesmethode als strategie achteraf door leerlingen	$62-59=3$
3: boogjesmethode als strategie vooraf door leerlingen	$62-59=$ $62-38=$

De stappen op weg naar het begrijpen van de relatie tussen optellen en aftrekken zijn voor het eerst aangeduid in het proefschrift 'Met Sprongen Vooruit' (2001). Dit betekent dat je deze benaderingswijze in de reken-wiskundemethode van voor die tijd niet zult tegenkomen.

Niveau van oplossen

Het oplossen van sommen met het relatieboogje is een oplossingsstrategie op formeel niveau. In de geschetste stappen naar het begrijpen van deze strategie, dat wil zeggen het begrijpen van de inverse relatie tussen aftrekken en optellen, is bewust geen materiaal of schema gebruikt. In het volgende voorbeeld wordt duidelijk dat een model als een lege getallenlijn zelfs verwarrend kan werken.

Johnny leest de hieronder afgebeelde opgave voor. Als hij daarmee klaar is, antwoordt hij onmiddellijk '3'. Wanneer de leerkracht hem vraagt op een lege getallenlijn te noteren hoe hij daaraan is gekomen, raakt hij in de war. Hij noteert '68+2=70 en nog 1 los + is 71'. Vervolgens noteert hij als antwoord 71, terwijl hij aanvankelijk het antwoord meteen wist!

Verwarring bij gebruik lege getallenlijn



Johnny

In de pot zitten 71 knikkers.
Hanneke haalt er 68 knikkers uit.
Hoeveel knikkers blijven er over?

$$68+2=70 \text{ en nog } 1 \text{ los} + \text{ is } 71$$

71

Het is echter heel goed mogelijk dat leerlingen uit zichzelf de knikkeropgave op een lege getallenlijn uitrekenen. Als ze dit doen en ze maken daarbij gebruik van de strategie van het aanvullend optellen, dan gebruiken ze de lege getallenlijn als een rekenmodel en niet als een denkmodel. Kenmerkend voor het gebruik van de lege getallenlijn als rekenmodel is dat de keuze voor een oplossingsstrategie in dit geval die van het aanvullend optellen, is vastgesteld *voordat* het antwoord op een lege getallenlijn wordt uitgerekend. De keuze voor het aanvullend optellen op een lege getallenlijn ligt meer voor de hand naarmate de getallen verder uit elkaar liggen. In het geval dat er bijvoorbeeld van de 71 knikkers 47 worden weggehaald, zullen de kinderen eerder steun zoeken bij het rekenen op een lege getallenlijn. Van 47 naar 71 tel je immers niet zo makkelijk door als van 68 naar 71.

Variaties en uitbreidingen

• Verdwijnsommen (Stap 0).

Verdwijnsommen zijn makkelijker dan bijna-verdwijnsommen. Een verdwijnsom is bijvoorbeeld '62-62=.'. Leerlingen doen dit intuïtief goed, omdat ze hierbij gebruikmaken van hun natuurlijke kennis dat er niets overblijft als je alles weghaalt. Deze ogenschijnlijk flauwe sommen zijn van belang en kunnen worden gebruikt als opstap naar het oplossen van bijna-verdwijnsommen.

• Extreme uitkomsten.

Naarmate de antwoorden er meer naast zitten, zullen kinderen sneller kunnen beslissen of iets kan of niet, zoals bij: $82-80=40$. Er zou daarom eerst voor het nakijken van werk waarbij de antwoorden van de sommen extremer zijn, kunnen worden gekozen. Leerlingen durven zich dan sneller te verlaten op de nieuwe controle-strategie. De volgende stap naar het hanteren van het boogje als strategie vooraf ligt dan wellicht ook eerder binnen het bereik van de kinderen.

• Waku-waku en bijna-verdwijnsommen.

Waku-waku als aanstichter voor het maken van eigen producties is in het gehele leertraject voor het rekenen tot 100 inzetbaar. Om hem bijzonder te houden vertrekt hij af en toe naar het buitenland. Helemaal uit het zicht verdwijnt hij echter niet. Hij zendt brieven waarin hij zinspeelt op wat de leerlingen nog lastig vinden. Hebben de kinderen bijvoorbeeld nog moeite met het toepassen van de boogjesmethode, dan stuurt hij een brief waarin hij vraagt zijn zelfbedachte bijna-verdwijnsommen even te controleren. Hiernaast staat zo'n brief.

Mohamed, 19 mei 1997

Lieve rekkenaars van groep 4,

Bedankt voor alle sommen van v. Ik geloof dat ik het nu snap. Om te laten zien dat ik het begrijp, schuur ik jullie 2 rijtjes met sommen.

Het zijn boogjes-sommen.

Kijken jullie ze even na? Verbekeren mag ook, maar ik denk dat ze allemaal zo goed als wat zijn.

Hier zijn ze:

$82-80=2$	$63-59=3$
$57-56=2$	$79-77=2$
$41-38=3$	$52-48=4$
$100-98=1$	$65-56=7$
$34-29=4$	$100-89=11$

Met vriendelijke Waku-waku-groeten,
jullie vriend Waku

Vervolgens krijgen alle leerlingen de producties van Waku-waku met de opdracht ze even voor hem na te kijken.

Naam: Fouad

Groep 4

Datum: 23 mei

$$\begin{array}{l} 82-80=2 \text{ h} \\ 57-56=2 \text{ x} \\ 41-38=3 \text{ h} \\ 100-98=1 \text{ x} \\ 34-29=4 \text{ x} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 63-59=3+ \\ 79-77=2 \text{ h} \\ 52-48=4 \text{ h} \\ 65-56=1 \text{ x} \\ 100-89=11 \text{ h} \end{array}$$

Naam: mohammed

Groep 4

Datum: 23 mei 1997

$$\begin{array}{l} 82-80=2 \text{ h} \\ 57-56=2 \text{ h} \\ 41-38=3 \text{ h} \\ 100-98=1 \text{ h} \\ 34-29=4 \text{ h} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 63-59=3/4 \\ 79-77=2 \text{ h} \\ 52-48=4 \text{ h} \\ 65-56=1 \text{ h} \\ 100-89=11 \text{ h} \end{array}$$

Het ligt bij het correctiewerk voor de hand de som met behulp van het antwoord te verifiëren. Voor '82-80=2' betekent dit dat 80 en 2 bij elkaar opgeteld de uitkomst 82 geeft en dus een krul verdient.

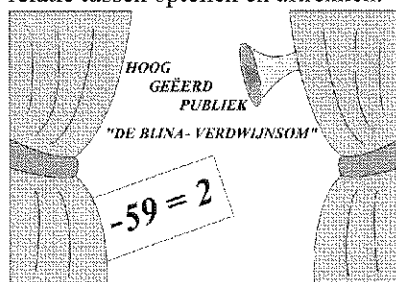
In het leerlingenwerk van Fouad en Mohammed is te zien hoe de leerlingen op hun eigen niveau het werk van Waku-waku nakijken. Fouad zet alleen kruisjes en krulletjes, maar Mohammed verbetert Waku-waku meteen even.

De ervaring uit het onderwijsexperiment 'Met Sprongen Vooruit' leert dat met een aantal van dergelijke oefeningen een brug kan worden geslagen tussen het controleren met een boogje-achteraf (stap 2) en de strategie waarbij op voorhand het antwoord wordt gevonden door het bepalen van het verschil (stap 3).



fragment: 'Controleren werk Waku-waku' (Bijna-verdwijnsommen)

- De goede som.
Laat leerlingen sommen bedenken die wel bij het antwoord van Waku-waku passen.
Bijvoorbeeld: $65-64=1$ bij zijn foutieve opgave $65-56=1$.
- Achterhaal het aftrekgetal.
Zet een aantal bijna-verdwijnsommen zo op het bord dat het min-teken, de aftrekker, het is gelijk-teken en de uitkomst te zien zijn als de linkerhelft van het bord is dichtgeklapt. Vraag de leerlingen welk som er te zien zal zijn als het bord wordt geopend. Benadruk bij de controle de relatie tussen optellen en aftrekken.



- Raad mijn bijna-verdwijnsom.
Schrijf een aantal bijna-verdwijnsommen op kaartjes. Toon leerlingen hiervan alleen de uitkomst. Vraag ze er een som bij te bedenken. Licht een tipje van de sluier op en zeg dat het om een aftrekking met grote getallen gaat. Geef met warm(er) en koud(er) aan of ze dicht zijn genaderd. Het kan ook helpen de helft van de getallen te verraden. Bijvoorbeeld: het eerste getal (aftrektal) is iets in de zeventig en het tweede getal (aftrekker) is iets in de zestig. Toon ter controle het kaartje en benadruk de relatie tussen optellen en aftrekken. Een foute som als $72-62=1$ wordt op het bord genoteerd. Laat met de boogjesmethode zien waarom deze som niet klopt.
- Toepassingen.
Nodig de leerlingen uit ook opgaven als $73-48$ of $100-49$ met behulp van de boogjesmethode op te lossen. Vraag ze welke sommen ze met de boogjesmethode willen oplossen en welke niet.
- Zie ook Menne, J. (2003). Bijna-verdwijnsommen. *Willem Bartjens*, 22, 5, p.28-30.
- Werkblad B1 t/m B3.

10. Rekenen op formeel niveau

Wanneer leerlingen op een lege getallenlijn rekenen, opereren ze op een semi-formeel, modelondersteunend niveau. Het is de bedoeling dat leerlingen uiteindelijk op het hoogste niveau van formalisering leren rekenen: het formele, vakmatige niveau. Op dit niveau noteren kinderen de opgaven en de bijbehorende rekenhandelingen in rekentaal zonder tussenkomst van hulpmiddelen. Dit niveau zal niet voor alle leerlingen eind groep 4 kunnen worden bereikt. Let wel, eigen producties en bijna-verdwijnsommen worden al veel eerder op formeel niveau uitgerekend. Wat betreft deze specifieke onderdelen rekenen leerlingen dus ook al in groep 4 (3) op een formeel niveau. Aangezien het didactische primaat bij de rijgmethode wordt gelegd, ligt het voor de hand dat de niveaus van formalisering ook allereerst bij het rijgen worden doorlopen. Dit wil niet zeggen dat met de concrete onderbouwing van het splitsen en het gevarieerde rekenen gewacht dient te worden tot de formele afwikkeling van het rijgen voltooid is. Temeer niet, omdat er mooie verbindingen tussen rijgen enerzijds en splitsen en variarekenen anderzijds te maken zijn, verbindingen die duidelijk in pijlentaal zijn uit te drukken.

Doel

Leerlingen rekenen opgaven uit zonder tussenkomst van een lege getallenlijn of ander ondersteunend model. Ze noteren hun antwoorden direct of na het noteren van één of meerdere tussenstappen in rekentaal. De strategieën die hierbij aanvankelijk voor de hand liggen zijn rijg- en variastrategieën.

Benodigd materiaal

- kale en contextopgaven

Start

De overgang van informeel, modelondersteund naar formeel, vakmatig rekenen verloopt in het oefenprogramma via de volgende fasen: