

Bijvoorbeeld $54-45=9$. Op het bord staat:

$$54 - 45 = 9$$

- Waku-waku zegt: 'Ongeveer 100.' Bedenk sommen waar ongeveer 100 uitkomt. Bijvoorbeeld: $200-98$ of $350-253$.
- Waku-waku als een soort echo. De kinderen wordt bijvoorbeeld gevraagd een som te bedenken waar 100 uitkomt. Waku-waku reageert hierop door een som te verzinnen die sterke overeenkomst vertoont met de genoemde som. Stel dat '50 erbij 50' wordt geopperd. Waku-waku fluistert de juf in dat hij dan 49 erbij 49 ook weet. 'Hoe zou hij dat doen? Wie weet nog een andere lastige som die je dan ook snel kunt weten?'



fragment: 'Uitlokken van variastrategie' (Eigen producties)

In plaats van moeilijke sommen af te leiden van eenvoudige, kan het omgekeerde natuurlijk ook. Kinderen bedenken lastige sommen voor Waku-waku en hij past eerdergenoemde variastrategieën toe om er een makkelijke som van te maken. Zo wordt een som als $93-28$ in $95-30$ getransformeerd. 'Wat heeft hij gedaan? Is de nieuwe opgave nu sneller op te lossen dan $93-28$?' Dergelijke oefeningen brengen kinderen op het idee ook andere oplossingswijzen dan rijgstrategieën toe te passen.

Waku-waku als een soort echo zoals hiervoor beschreven, helpt de leerlingen rekenen op een formeel niveau gebruikmakend van variastrategieën zoals:

- compenseren, waarbij gebruik wordt gemaakt van ronde getallen ($49+49=50+50-2$; $93-28=95-30$ (beide termen ophogen met twee), of van mooie getallen (...))
- verwisselen ($2+7=7+2$)
- aanvullen of overbruggen ($62-48$ uitrekenen door vanaf 48 aanvullend op te tellen tot 62).
- Zie Menne, J. (1997). Op Waku-waku kun je rekenen. *Willem Bartjens*, 16, 5, p.12-15.
- Werkblad E1 t/m E8.

De pratende handpop Waku-waku is het hele jaar door inzetbaar voor het maken van eigen producties. Hij laat leerlingen op hun eigen niveau rekenen, helpt hen de interne structuur van de getallenrij nader te verkennen en sluit daarbij aan bij het gebruik van modellen als het rekenrek, de kralenketting en de lege of denkbeeldige getallenlijn. Bij het oefenonderdeel 'Bijna-verdwijnsommen' keert hij nog een keer terug en speelt hij een rol bij het oplossen van bijna-verdwijnsommen op een formeel niveau.

8. Opereren op de lege getallenlijn

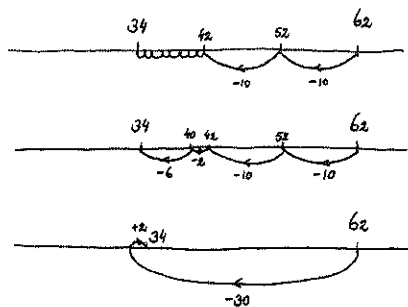
Doel

Leerlingen rekenen alle typen opgaven tot 100 meer of minder verkort uit op een lege getallenlijn. De strategie die hierbij het meest voor de hand ligt, is een rijgstrategie. Wanneer het doel is bereikt, rekenen de leerlingen op een semi-formeel niveau en hanteren ze meer of minder verkorte rijgmethoden.

De mate van verkorting zal per leerling verschillen. Voor de opgave $62-28$ kunnen meer en minder verkorte oplossingswijzen er als volgt uitzien:

Meer en minder verkorte rijgmethoden

$$62 - 28 =$$



Benodigd materiaal

- kladpapier eventueel voorzien van lege getallenlijnen
- poster met veel voorkomende bruikbare strategieën

- sprong van 10
- sprong via een mooi, rond getal

Voorwaarden

- Leerlingen beheersen de basale vaardigheden genoemd onder 'Getallen' en 'Bewerkingen met getallen'.
- Leerlingen weten wat een streepje op een lege getallenlijn betekent.
Aan deze voorwaarde wordt gewerkt door tijdens het veelvuldig fysiek aflopen van de telrij de relatie te leggen met het springen op een lege getallenlijn. De lege getallenlijn fungeert hierbij als schematisering van het stappenpad. Een streepje op de lege getallenlijn geeft zodoende aan waar je staat en waarvandaan je kunt springen.
- Leerlingen begrijpen de relatie tussen het maken van sprongen vooruit en achteruit en de daarbij passende optel- en aftrekopgaven.

Sommenkaart

Als aan de voorwaarden is voldaan worden alle type opgaven aan de orde gesteld. In onderstaande sommenkaart is een overzicht gegeven van het sommenaanbod naar type. Bij de keuze voor de naamgeving van de typen is zoveel mogelijk gekozen voor de begrippentaal die wordt gebruikt bij de oefenonderdelen. De sommen in de cellen met normaal omlijnde randen maken deel uit van de warming-up voorafgaand aan het opereren op de lege getallenlijn. Het is niet de bedoeling dat leerlingen deze sommen uitrekenen op een lege getallenlijn. Ze doen dit uit het hoofd. De sommen in de cellen met de dik omlijnde randen daarentegen mogen de leerlingen op een lege getallenlijn uitrekenen. De sommen in de cellen met normaal omlijnde randen komen eerder aan de orde dan de sommen in de dik omlijnde randen. Laatstgenoemde sommen worden allemaal min of meer tegelijk aan de orde gesteld. Voor de eerstgenoemde sommen geldt dat er een zekere sequentie in aanbieding bestaat. De sequentie waarin deze sommen aan de orde kunnen worden gesteld, is per type af te lezen in verticale richting en voor de onderscheiden typen in horizontale richting

Voorbeeld van een sommenkaart

<i>Tweelingen, splitsbloemen en toepassingen</i>	<i>Verliefde harten en toepassingen</i>	<i>Sprong van 10 en toepassingen</i>	<i>Bijna-verdwijnsommen</i>	<i>(overige) sommen binnen een tiental</i>
4+4 8-4	4+6 10-6	40+10, 40-10 50+20, 50-20		
40+40, 80-40 200-100	100-80			68-8*, 60+8*
44+4, 48-4 140+40 40+30, 70-40, 63+4, 67-4	30-5, 50-9 72+8	43+10, 43-10	(81-81)	73+5**, 79-8**
46+6, 44-6		43+11, 43-20 70+24, 46-16		
	70-24			
44+44, 25+25		43+21, 43-21		
43+9, 43-9, 43+28, 62-28 42-17, 46+16, 47+47, 46+47			81-80 80-78, 81-79	
81-58, 43-28				

* Deze opgaven kunnen de kinderen oplossen als ze veelvuldig in sprongen en grote huppen naar getallen zijn gesprongen en de relatie tussen sprongen en sommen is begrepen.

** Deze opgaven vallen in de restcategorie omdat de splitsingen van 8 en 9 (en 1, 2 en 3) niet met behulp van splitsbloemen worden geoefend.

Niet alle sommen in de cellen met dik omlijnde randen zijn even eenduidig onder een type som onder te brengen. De plaats van de opgave hangt namelijk samen met de keuze voor de oplossingsstrategie. Zo kan de opgave '43+28' met behulp van sprongen van 10 en met toegepaste verliefde-hart-kennis worden opgelost (door 43+28 uit te rekenen via +10, +10, +10, -2). Het is echter ook mogelijk dat voor een combinatie van sprong van 10, hart-kennis en splitsen wordt gekozen (door 43+28 uit te rekenen via +10, +10, +7, +1).

Start

De leerkracht start met een warming-up.



fragment: 'Warming-up' (Opereren op de lege getallenlijn)

Na de warming-up vraagt de leerkracht sommen op te lossen als $43+20$ en $43-11$. Deze sommen worden echter al snel uitgebreid met opgaven als

$43+21$, $43-21$, $43+9$, $43-9$, $43+28$, $43-28$

$40+24$, $40-24$

$43+43$, $25+25$

$46+6$, $44-6$

$46+16$, $47+47$

$81-80$, $80-78$, $81-79$, $81-58$

De leerlingen springen de oplossingswijze op de denkbeeldige getallenlijn voor het bord en noteren hun sprongen op de lege getallenlijn op het bord.

De nadruk bij de eerste besprekingen van oplossingen op de lege getallenlijn ligt op het handig springen van het aftrek- en opteltal en niet zozeer op het antwoord. De leerkracht vraagt herhaaldelijk wie nog een andere handige manier weet om de opgave op te lossen. De leerlingen laten hun handige manier zien door op de denkbeeldige getallenlijn te springen. Op het bord wordt de naam van het desbetreffende kind bij de oplossing genoteerd.



fragment: '62-19 op het stappenpad' (Opereren op de lege getallenlijn)

Er wordt gestemd welke manier de leerlingen het handigst vinden.



fragment: 'Welke manier vind je het handigst?' (Opereren op de lege getallenlijn)

De leerkracht vraagt de leerlingen vervolgens om een vergelijkbaar type opgave op dezelfde manier op te lossen.



fragment: '84-29 op je handigste manier' (Opereren op de lege getallenlijn)

Natuurlijk zullen niet alle kinderen voor de meest verkorte manier kiezen en natuurlijk zullen ook niet alle kinderen die wel hiervoor kozen een vergelijkbaar type opgave foutloos oplossen. Maar door herhaaldelijk op deze manier oplossingswijzen te bespreken wordt de groep van leerlingen die meer verkort springt snel groter.

Het is hierbij van belang dat de leerkracht vooraf bedenkt hoe een wijze van oplossen kan worden verwoord en dit ook meerdere malen uitspreekt alvorens het van kinderen te verlangen. De volgende veel voorkomende bruikbare strategieën kunnen op een poster worden geschreven en voor het bord gehangen:

- sprong van 10
- sprong via een mooi, rond getal

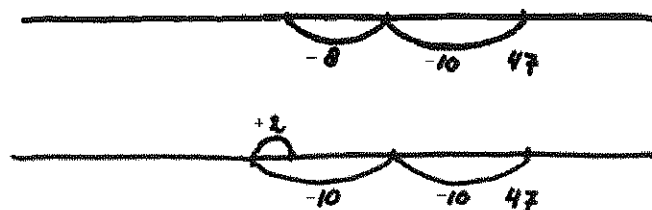
Leerlingen die moeite hebben met het verwoorden van hun aanpak hebben hieraan steun en voor rekenzwakke leerlingen geeft de poster vooraf richting aan hun oplossingswijze.

Omgaan met fouten

Er volgen twee voorbeelden van een didactische werkwijze naar aanleiding van geconstateerde problemen:

- Een meer gestructureerde aanpak bij het werken op een lege getallenlijn.
Voor sommige kinderen is een meer gestructureerde aanpak nog wenselijk. Deze leerlingen krijgen de opdracht om 'slechts' een verkorte oplossingswijze op de lege getallenlijn te tekenen en nog niet de uitkomst te bepalen. Een som als $47-18$ kan worden uitgerekend door eerst een rekenschema te maken waarbij gevisualiseerd staat hoe je '18' kunt terugspringen. Hierbij wordt aanvankelijk niet berekend waar je in de telrij uitkomt als je deze sprongen maakt. In onderstaand voorbeeld zijn twee rekenschema's weergegeven voor het oplossen van de opgave $47-18$. Een volgende stap is nu om het schema rekenend in te vullen.

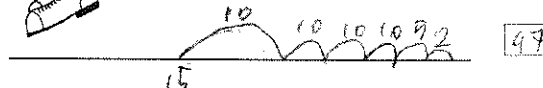
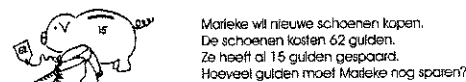
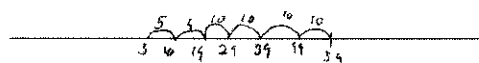
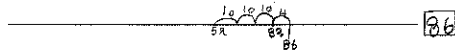
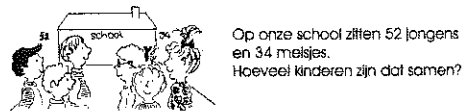
47-18



- Naar aanleiding van een geconstateerde fout een leerling in een conflictsituatie brengen. Stel, een leerling lost $56-18$ op door vanaf 56 eerst twee sprongen van 10 terug te maken en daarna nog een grote hup van 2 terug te gaan. Door de leerling vervolgens te vragen hoeveel $56-22$ is, wordt meestal snel opgemerkt dat bij de vorige som 22 is teruggesprongen in plaats van 18.

Contexten

Contextopgaven komen vrijwel tegelijkertijd met alle typen kale sommen aan de orde. Het gaat hier om contextopgaven zoals:



Uit bovenstaande oplossingswijzen blijkt dat de lege getallenlijn de gekozen oplossingsmanieren prima kan ondersteunen.

De tweede voorbeeldopgave zou u wellicht sneller willen oplossen via aanvullend optellen. Hiervoor is vereist dat de relatie tussen optellen en aftrekken wordt begrepen. Voor de meeste leerlingen, die niet op het semi-formele niveau rekenen, zal echter gelden dat ze de relatie tussen optellen en aftrekken nog niet zien en hier dus ook geen gebruik van kunnen maken. Ze rekenen de opgaven dan uit door aftrekken als erafhalen of wegnemen. Een leerling die wel de relatie ziet, mag hiervan uiteraard gebruikmaken. Deze leerling hoeft deze opgave niet op een lege getallenlijn uit te rekenen. In de toelichting op het oefenonderdeel 'Bijna-verdwijnsommen' wordt expliciet aandacht besteed aan de relatie tussen optellen en aftrekken.

Structureer de oplossingswijze niet door leerlingen eerst van een contextopgave te laten beslissen of het een 'erbij-som' dan wel een 'eraf-som' is. Je vraagt dan naar de kale som die bij de context hoort. Dit kan het oplossen onnodig bemoeilijken. Kijk bijvoorbeeld naar de derde voorbeeldopgave en de daarbij behorende oplossingswijze. Formeel gezien hoort bij deze contextopgave de kale som $15 + \dots = 62$, een zogenaamde stipsom. Een stipsom wordt opgelost via aanvullend optellen. De oplossingswijze in de derde voorbeeldopgave laat ook de strategie van het aanvullend optellen zien. Echter, het niveau waarop dit is gedaan behoort tot het semi-formele rekenen. Het is de vraag of de desbetreffende leerling de formele stipsom erbij kan bedenken. Eis je dit wel, dan maak je het de leerlingen moeilijker.

Van meet af aan alle typen opgaven

In vergelijking met de bestaande reken-wiskundemethoden wijkt het oefenprogramma af van de methodische regel van de toenemende complicering. Deze regel houdt in dat in het eerste halfjaar in groep 4 alleen opgaven worden aangeboden waarbij de op te tellen of af te trekken eenheden binnen een tiental blijven. Dit zijn opgaven zoals $59-35$ en $62+24$. Pas tegen het eind van groep 4 komen de complexere opgaven met tientaloverschrijding aan bod. De reden om van meet af aan alle soorten opgaven aan te bieden is dat een beperkt aanbod van louter sommen zonder tientaloverschrijding in de hand werkt dat de afzonderlijke cijfers voor de tientallen en de afzonderlijke cijfers voor de eenheden bij elkaar worden opgeteld of afgetrokken.

Bij de opgave $59-34$ wordt het antwoord verkregen door de '3' in mindering te brengen op de '5' en de '4' van de '9' af te halen. De verkregen tussenuitkomsten '2' en '5' leveren dan het antwoord 25 op. Leerlingen, ook zwakke rekenaars, ontdekken deze regel en zullen dit ook toepassen bij opgaven mét tientaloverschrijding. Met name bij aftrekopgaven zullen ze met deze trucmatige procedure de mist ingaan. Het antwoord op de opgave $62-26$ zal dan 44 (of soms zelfs 48) luiden. Uit onderzoek van Klein is gebleken dat ook zwakke rekenaars betere resultaten behalen wanneer ze van meet af aan alle typen opgaven proberen op te lossen dan wanneer het aanbod in typen opgaven gefaseerd geschiedt. De resultaten worden niet dadelijk zichtbaar, maar na enkele maanden zijn er significante verschillen met

de groep leerlingen die met van tevoren vastgestelde tussenpozen nieuwe typen sommen kregen aangereikt. Het onderzoek van Klein kan worden beschouwd als de voorloper op het ontwikkelingsonderzoek 'Met Sprongen Vooruit'. (Klein, A.S. (1998). *Flexibilization of mental arithmetic strategies on a different knowledge base: The Empty Numberline in a Realistic versus Gradual Program Design* (diss.) Utrecht: CD-β Press / Freudenthal Institute.)

Variaties en uitbreidingen

- Bespreken van oplossingen in de volgende les.
Door het individuele werk pas de volgende oefenles te bespreken, kunnen de leerlingen hun werkblad tussendoor afmaken. Bovendien heeft de leerkracht nu ruim de gelegenheid om het werk te analyseren. Ze krijgt hierdoor een indruk van de aanpakken van de leerlingen en kan zodoende zo optimaal mogelijk op hun behoeften ingaan.
- Werkblad O1 t/m O9.

9. Bijna-verdwijnsommen

Een bijna-verdwijnsom is een aftrekking waarvan aftrektal en aftrekker bijna even groot zijn, zodat er na de eraf-handeling 'niet veel overblijft' of 'bijna alles verdwijnt'. Een som als $62-61$ behoort hiertoe.

Doel

Leerlingen zien de relatie tussen optellen en aftrekken en kunnen de rekenstrategie van het aanvullende optellen toepassen.

Start

De relatie tussen optellen en aftrekken wordt expliciet gemaakt. Dit leerproces verloopt via een aantal stappen.

Stap 1

De leerkracht vraagt een bijna-verdwijnsom als $62-61$ op te lossen. Stel, hierop wordt het antwoord '1' gegeven. Dan bevestigt de leerkracht dit goede antwoord door de som als volgt te controleren: ' $62-61=1$, want $61+1=62$ '. Terwijl de leerkracht dit zegt, schrijft ze de som op het bord en tekent een relatieboogje van 61 naar 1.

$$62 - 61 = 1$$

De som wordt nu van rechts naar links gelezen. Dit is te vergelijken met het beeldje voor beeldje terugdraaien van een film. Een klein detail hierbij is dat bij de controle het grootste getal voorop wordt gesteld. Dit is namelijk makkelijker en voor kinderen vormt het geen probleem. De verwisselingschap passen ze al geruime tijd toe.

Het kan wenselijk zijn de hierboven uitgebeelde relatie tussen aftrekken en optellen te verduidelijken met pijlentaal voordat je het boogje zet.

$$\begin{array}{r} -61 \\ 62 \\ \hline +61 \\ \hline \end{array} = 1$$

Overigens, wanneer een kind een ander antwoord geeft dan 1, kan de leerkracht dit antwoord op dezelfde manier verifiëren als hiervoor geschetst.

Kenmerkend voor deze stap is dat de leerkracht de boogjesmethode gebruikt als strategie *achteraf*.



fragment: 'Introductie relatie optellen en aftrekken' (Bijna-verdwijnsommen)

Stap 2

Een volgende stap is nu om een iets lastigere bijna-verdwijnsom als $62-59$ te laten oplossen. Kinderen doen dit net als bij $62-61$ met een controle achteraf, zoals de leerkracht deed. Bij de bespreking van dergelijke opgaven wordt op het bord door middel van het boogje telkens de relatie tussen aftrekken en optellen benadrukt.

$$62 - 59 = 3$$

Kenmerkend voor deze stap is dat leerlingen de boogjesmethode gebruiken als strategie *achteraf*. Door de keuze van de getallen loont het om het boogje te gebruiken.

Leerlingen kunnen voor het eerst de boogjesmethode als strategie achteraf gebruiken als ze hun eigen producties voor Waku-waku moeten nakijken. Het idee hierachter is dat leerlingen vanuit sommen die ze al kennen en/of zelf hebben bedacht makkelijker de relatie tussen aftrekken en optellen begrijpen, dan wanneer deze relatie vanuit voor hen onbekende, moeilijke sommen wordt gelegd.



fragment: 'Eigen producties controleren' (Bijna-verdwijnsommen)