

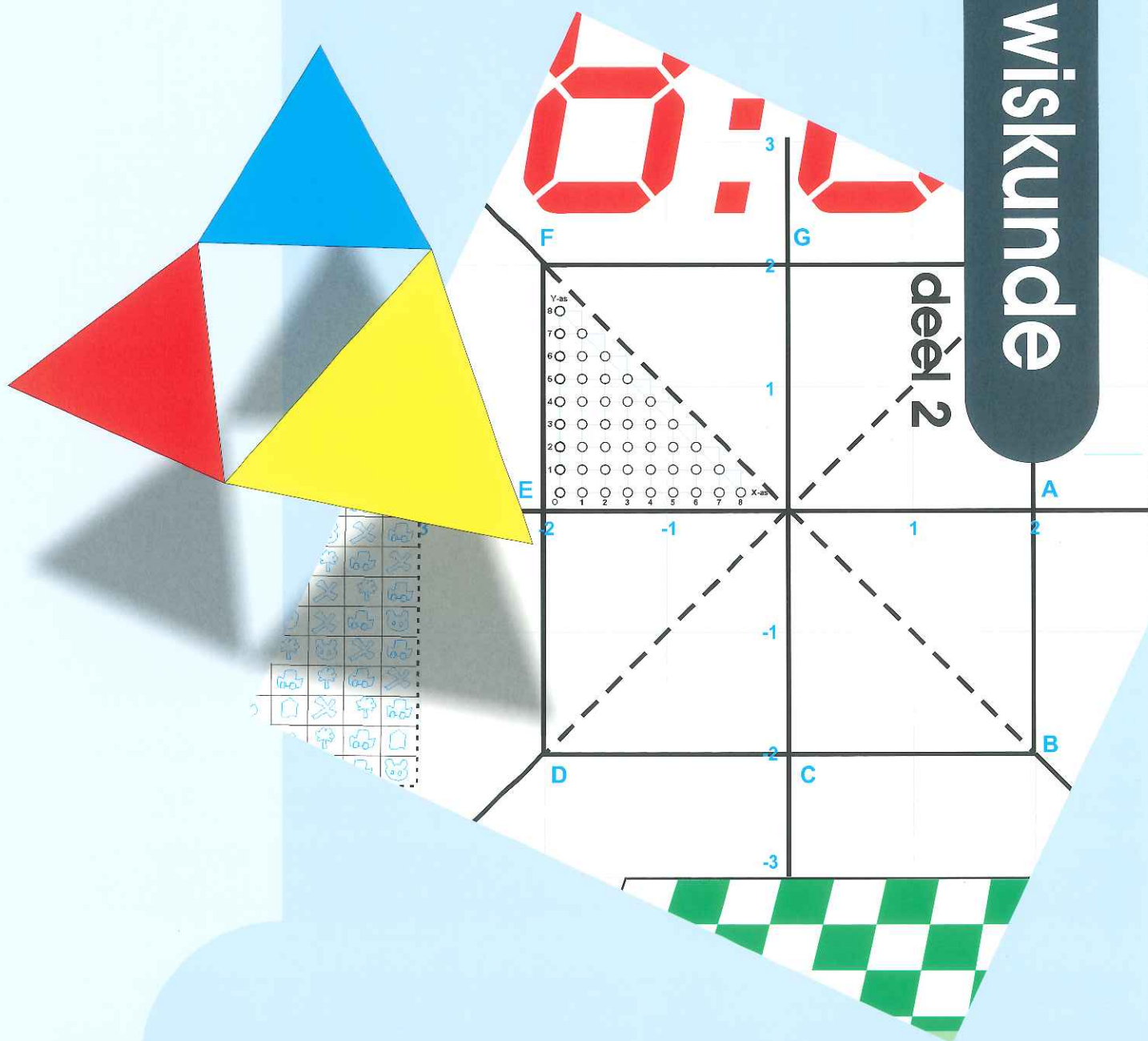
Pascal Goderie

werkboek van
groep

TOPkl▲ssers

wiskunde

deel 2



ThiemeMeulenhoff

TOPklassers

wiskunde

deel 2

Werkboek

Auteur

Pascal Goderie



Inhoud

Inleiding voor de leerling	3
Les 1 De loterij	4
Les 2 Priemloten	6
Les 3 Knap geknipt deel 1	8
Les 4 Knap geknipt deel 2	10
Toets 1	12
Les 5 De machtige twee	14
Les 6 De goocheltruc	16
Les 7 Slingers	18
Les 8 De stelling van Pythagoras	20
Toets 2	22
Les 9 Het tijdspel deel 1	24
Les 10 Het tijdspel deel 2	26
Les 11 Mobiele puzzels	28
Les 12 Hoe ver komt jouw paard?	30
Toets 3	32
Les 13 Een oud kunstje	34
Les 14 Twee nieuwe scholen	36
Les 15 De parachute	38
Les 16 De mieren van Pascal	40
Toets 4	42
Eindtoets A	44
Eindtoets B	46

Inleiding voor de leerling

Dag Topklasser,

De kans is groot dat jij *goed* in rekenen-wiskunde bent.

De kans is groot dat jij *beter* met pittige vraagstukken bezig kunt zijn.

De kans is groot dat jij *best* graag hard werkt om het goede antwoord te vinden.

Daarom ligt hier voor je het tweede deel van *Topklassers Wiskunde*.

Dit werkboek staat vol met wiskundige vraagstukken.

Sommige onderdelen horen eigenlijk thuis in het programma van de middelbare school.

Kinderen die al op de basisschool een extra uitdaging aankunnen, kinderen die goed kunnen doorzetten, die vinden hier tal van interessante problemen.

Problemen om alleen of samen met enkele andere *topklassers* te lijf te gaan.

Is het niet leuk om al een voorschot te nemen op de stelling van Pythagoras?

Of eens diep door te denken over ingewikkelde vraagstukken?

Ga er eens lekker voor zitten en laat je verrassen.

Misschien verras jij ons met slimme wiskundige bewijzen?

Als je een les afhebt, vraag dan aan de leerkracht het antwoordenboek.

Veel plezier en succes.

Laat zien dat jij een echte *wiskunde topklasser* bent!

Pascal Goderie

Op de school van Lotte en Tonio wordt over een maand een actiedag gehouden. Alle kinderen helpen mee om acties te bedenken. Lotte en Tonio gaan een loterij organiseren. Ze zien er niets in om snel nog allerlei prijsjes te verzamelen, dus besluiten ze om met geldprijzen te werken. De opbrengst van de verkochte loten gaat naar het goede doel, tenminste, nadat alle geldprijzen uitgekeerd zijn.



Tonio wil de hoogte van de geldprijs laten afhangen van het lotnummer en daarbij uitgaan van deelbaarheid. Is het lotnummer deelbaar door 1, dan krijg je 1 euro, is het lotnummer deelbaar door 2, dan krijg je 2 euro. Dit gaat zo door tot en met delen door 10. Het deelbaar zijn door getallen groter dan 10 levert niets meer op. Iemand die bijvoorbeeld lotnummer 15 heeft, krijgt in de plannen van Tonio 9 euro, immers 15 is deelbaar door 1, door 3 en door 5.

Maar hoe duur moeten Lotte en Tonio de loten maken? Lotte denkt aan € 10,- per stuk. De koper van lotnummer 15 heeft dan 1 euro verlies. Als die euro niet als prijzengeld voor een ander lot nodig is, dan gaat hij naar het goede doel.

Wat vind jij van de plannen van Lotte en Tonio? De belangrijkste vraag is natuurlijk of de loterij op deze manier genoeg zal opleveren voor het goede doel. Denk mee over de loterij en beantwoord de volgende vragen. Alle loten worden op volgorde van nummer verkocht.

- 1 Levert lotnummer 6 winst of verlies op voor de eigenaar van het lot? En lotnummer 7?
.....
- 2 Welke van de lotnummers 1 tot en met 20 leveren voor de eigenaar het grootst mogelijke verlies op? Hoeveel is dan het verlies?
.....
- 3 Welke van de lotnummers 1 tot en met 20 leveren voor de eigenaar winst op? Welk nummer zorgt voor de grootste winst?
.....
- 4 Wat is de grootst mogelijke winst bij de eerste 100 loten? (nummers 1 tot en met 100)
.....

- 5 Wat is het hoogste bedrag dat iemand bij deze loterij kan winnen?
Hoeveel loten moeten er dan minimaal verkocht zijn?
- 6 Welk bedrag gaat er naar het goede doel als Lotte en Tonio precies 10 loten verkopen (lotnummers 1 tot en met 10)?
- 7 Welk bedrag gaat er naar het goede doel als er 20 loten verkocht worden?



Lotte ziet het al voor zich, dat wordt een berg rekenwerk als er 200 loten verkocht worden. Eigenlijk wil ze een meer algemene voorspelling doen, waarbij het niet uitmaakt of er nu 100 of 200 loten verkocht worden.

- 8 Kun jij een schatting maken over de opbrengst van de loterij als er meer dan 100 loten verkocht worden?

Tip: Een tweevoud is een getal dat door twee deelbaar is.
Wat ben je gemiddeld per lot kwijt aan de tweevouden?
(Ook in dit geval zijn de getallen die deelbaar zijn door 1 *eenvoudig*!)
Maar hoe zit dat met de drievouden en viervouden? En verder?

- 9 Hoe duur zou jij de loten maken?

Priemloten

Lotte en Tonio (uit Les 1) zijn erachter gekomen dat hun manier om de loterij op te zetten niet het gewenste resultaat oplevert. Gelukkig krijgen ze assistentie van enkele klasgenoten. De klas van Lotte en Tonio is gezegend met een aantal zeer ijverige rekenaars. Zo hebben Gunil en Diederik een variatie voor het prijzengeld bedacht en Meike en Johan hebben weer een ander plan.



Gunil en Diederik redeneren als volgt. Alle getallen zijn deelbaar door 1 en door zichzelf. De kunst is nu niet om zoveel mogelijk delers te hebben, maar om er verder géén te hebben. Hun wiskundeleraar heeft kort geleden nog verteld dat zulke getallen priemgetallen genoemd worden. Het getal 1 is een uitzondering. 1 rekent men niet tot de priemgetallen.

Het plan 'GuDie' van Gunil en Diederik houdt in dat een lotnummer dat geen priemgetal is, geen prijs oplevert. Een lot waarvan het nummer wel een priemgetal is, levert precies zoveel euro op als het lotnummer. Gunil en Diederik gaan er vanuit dat er niet meer dan 100 loten verkocht zullen worden.

- 1** Hoeveel geld gaat er naar het goede doel in plan 'GuDie' als de eerste 50 loten verkocht worden? Een lot kost 10 euro.

Meike en Johan vinden dat een getal met veel delers juist wel een prijs moet opleveren. Zij gaan ook uit van maximaal 100 verkochte loten en hebben van de getallen 1 tot en met 100 het aantal delers berekend. Hoe meer delers, hoe beter. Dezelfde deler mag zelfs vaker dan één keer meetellen. Daarom is het van belang zo ver mogelijk door te delen.

*Bijvoorbeeld: $12 = 2 \times 6$, maar $6 = 2 \times 3$, dus
 $12 = 2 \times 2 \times 3$ geeft één deler meer.
 Factor 1 doet niet mee. Dat zou flauw zijn:
 $12 = 2 \times 2 \times 3 \times 1 \times 1 \times 1 \times 1 \times 1 \times 1 \times 1 \times 1 \times 1 \dots$*



- 2** Wat voor soort getallen zijn de delers die je op deze manier vindt?

Dit uitsplitsen van een getal in delers die priemgetallen zijn, heet *ontbinden in priemfactoren*. 12 is dus ontbonden in drie factoren, twee keer priemfactor 2 en één keer priemfactor 3.

Het voorstel 'JoMei' van Meike en Johan luidt als volgt:
 Lotnummers met drie of minder factoren hebben geen prijs.
 Bij een lotnummer dat je kunt ontbinden in vier factoren, krijgt de eigenaar zijn geld terug. Een
 lotnummer dat je kunt ontbinden in vijf factoren wint een prijs van 25 euro en
 lotnummers ontbonden in zes of meer factoren winnen een hoofdprijs van 100 euro.

Gebruik het onderstaande schema om een antwoord op de volgende vragen te vinden.

1 = 1	21 =	41 =	61 =	81 =
2 = 2	22 =	42 =	62 =	82 =
3 = 3	23 =	43 =	63 =	83 =
4 = 2 x 2	24 =	44 =	64 =	84 =
5 =	25 =	45 =	65 =	85 =
6 =	26 =	46 =	66 =	86 =
7 =	27 =	47 =	67 =	87 =
8 =	28 =	48 =	68 =	88 =
9 =	29 =	49 =	69 =	89 =
10 =	30 =	50 =	70 =	90 =
11 =	31 =	51 =	71 =	91 =
12 = 2 x 2 x 3	32 =	52 =	72 =	92 =
13 =	33 =	53 =	73 =	93 =
14 =	34 =	54 =	74 =	94 =
15 =	35 =	55 =	75 =	95 =
16 =	36 =	56 =	76 =	96 =
17 =	37 =	57 =	77 =	97 =
18 =	38 =	58 =	78 =	98 =
19 =	39 =	59 =	79 =	99 =
20 =	40 =	60 =	80 =	100 =

- 3 Hoeveel geld gaat er naar het goede doel in voorstel 'JoMei' als de eerste 50 loten verkocht worden? Ook in voorstel 'JoMei' kost een lot 10 euro.
- 4 Hoeveel geld gaat er naar het goede doel in voorstel 'JoMei' als er 100 loten verkocht worden?
- 5 Hoeveel geld gaat er naar het goede doel in voorstel 'GuDie' als er 100 loten verkocht worden?
- 6 Welk voorstel heeft jouw voorkeur? Waarom?
- 7 Kun je tot slot voorspellen wat er zal gebeuren als er 500 loten verkocht worden?



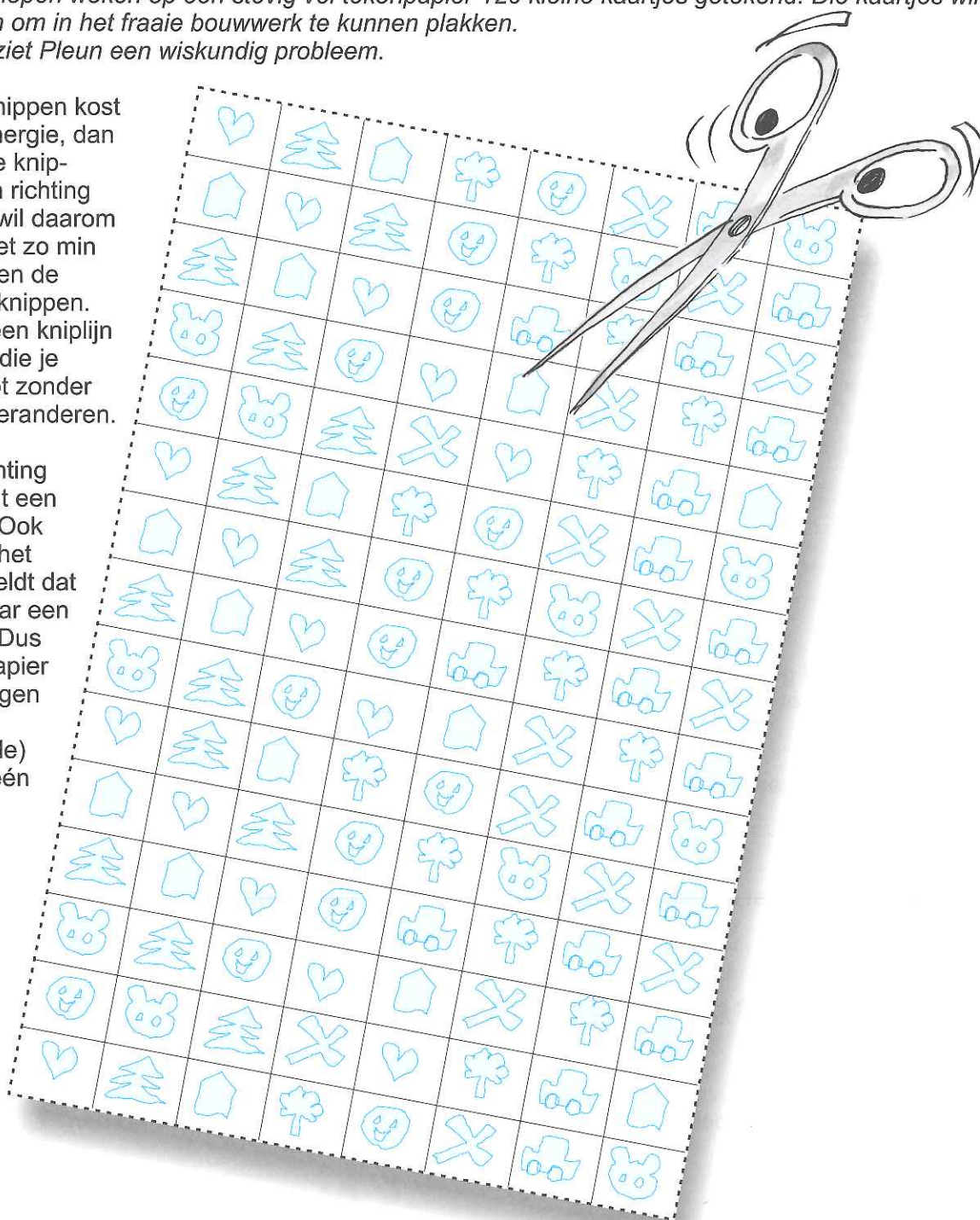
Pleun is geconcentreerd bezig met een kunststuk voor school.

Zij heeft de afgelopen weken op een stevig vel tekenpapier 120 kleine kaartjes getekend. Die kaartjes wil ze nu uitknippen om in het fraaie bouwwerk te kunnen plakken.

Bij dat knippen ziet Pleun een wiskundig probleem.

Een lang stuk knippen kost Pleun minder energie, dan steeds met korte knipbewegingen van richting veranderen. Zij wil daarom weten hoe zij met zo min mogelijk kniplijnen de kaartjes uit kan knippen. Hierbij moet je een kniplijn zien als een lijn die je aansluitend knipt zonder van richting te veranderen.

Zodra je van richting verandert, begint een nieuwe kniplijn. Ook wanneer je van het papier afgaat, geldt dat als overgaan naar een nieuwe kniplijn. Dus losse stukken papier tegen elkaar leggen (met de lijnen in elkaars verlengde) mag je niet als één kniplijn tellen.



1

Bekijk het blad met de 120 kaartjes die uitgeknipt moeten worden.

Hoeveel kniplijnen zijn er als elke rand van een kaartje als een aparte kniplijn geldt?

De stippellijnen moet je niet meetellen, dat zijn de randen van het blad.

2

Wat is het laagst mogelijke aantal kniplijnen waarmee jij de 120 kaartjes kunt uitknippen?

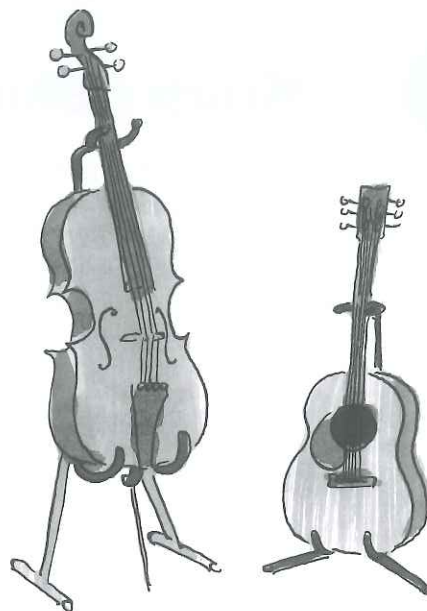
Beschrijf de manier waarop je dat zou doen.

Ellen, de moeder van Pleun, hoort behalve haar warme celloklanken ook het probleem en kijkt naar de vier snaren van haar cello.

"Je hebt veel minder kniplijnen als je eerst alle verticale lijnen helemaal knipt. Die lijnen zijn lekker lang", merkt zij op.

Pleun, die nog maar kort daarvoor enkele sfeervolle Spaanse gitaarstukjes ten gehore heeft gebracht, denkt aan de fretten van haar gitaar.

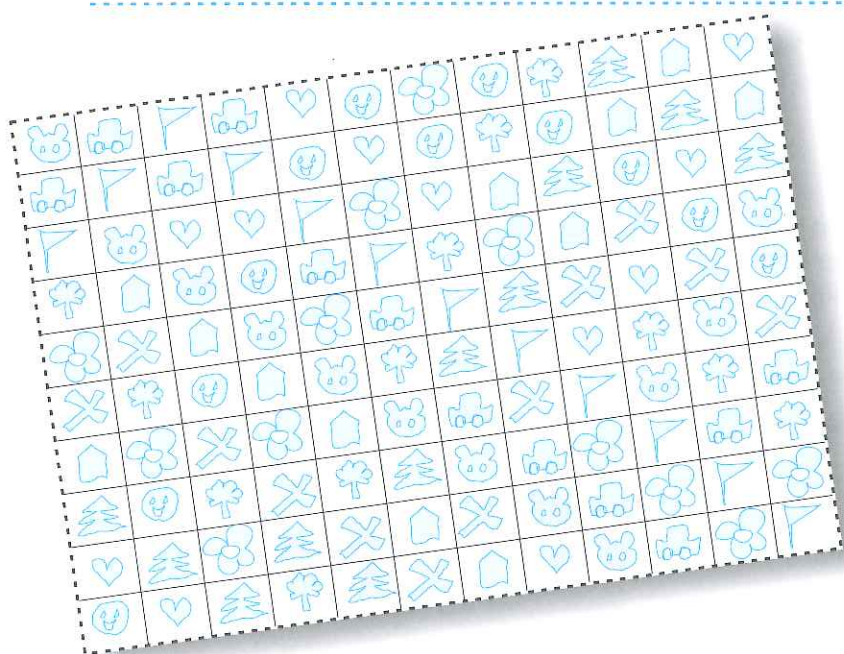
"Je kunt ook eerst alle horizontale lijnen helemaal knippen, dat zijn er lekker veel."



3 Hoeveel kniplijnen maak je als je eerst alle verticale lijnen knipt?

4 Hoeveel kniplijnen maak je als je eerst alle horizontale lijnen knipt?

5 Op welke manier maak je de minste kniplijnen, door eerst alle verticale lijnen te knippen of door eerst alle horizontale lijnen te knippen? Lijkt jouw oplossing op een van deze twee manieren?



Pleun is een echte denker. Zo vraagt ze zich af of het verschil zou uitmaken als ze de kaartjes op haar vel anders zou indelen.

6 Wat zijn de antwoorden op de vragen 1 t/m 5 als de 120 kaartjes getekend zijn zoals in de afbeelding hierboven in 10 rijen en 12 kolommen?

6.1 6.2

6.3 6.4 6.5

7 Bij welke indeling is het aantal kniplijnen het kleinst, bij 15 bij 8 of bij 10 bij 12?

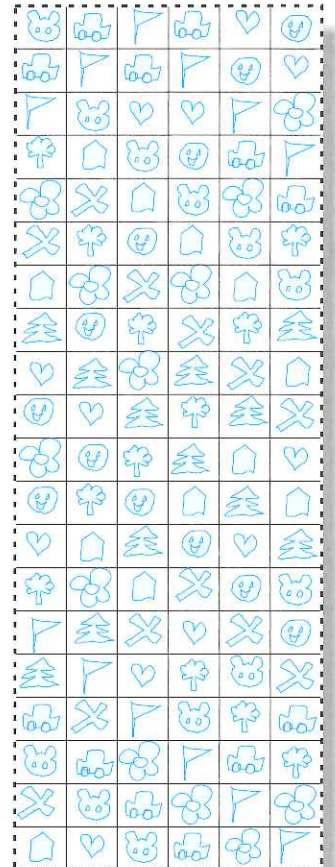
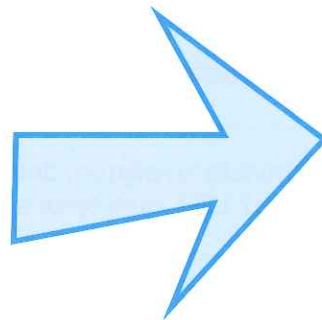
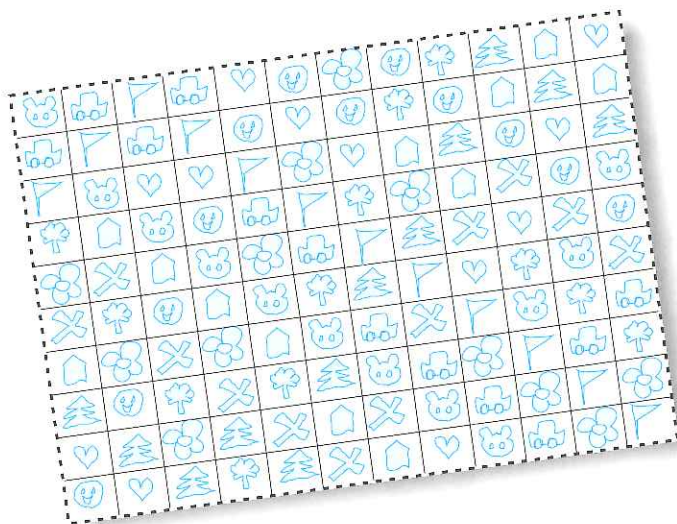
Les 4

Knap geknipt deel 2

In Les 3 heb je randen en kniplijnen geteld van 120 kaartjes op een vel papier. Eerst bij 120 kaartjes in 15 rijen en 8 kolommen, daarna bij 120 kaartjes in 10 rijen en 12 kolommen.

Je kon het aantal kniplijnen flink beperken door eerst alle verticale of horizontale lijnen te knippen.

- 1 Welke andere indelingen in rijen en kolommen voor 120 kaartjes kun je nog bedenken?
Als 10 rijen, 12 kolommen en 12 rijen, 10 kolommen als twee verschillende indelingen gelden, zijn er in totaal 16 indelingen.



- 2 Beantwoord voor alle zestien indelingen de volgende twee vragen.
Hoeveel kniplijnen maak je als je eerst alle verticale lijnen knipt?
Hoeveel kniplijnen maak je als je eerst alle horizontale lijnen knipt?

Je kunt bij deze vragen natuurlijk geduldig een voor een alle nodige berekeningen uitvoeren. Je kunt ook als een echte wiskundige zoeken naar een meer algemene berekening. Een berekening die je kunt toepassen op alle verschillende indelingen.



Als jij zonder verdere aanwijzingen dit probleem wilt aanpakken, lees dan niet verder en schrijf hieronder wat je bedacht en berekend hebt. Wil je die aanwijzingen wel, maak dan eerst de opgaven op de volgende pagina.

- 3 Met behulp van een tabel kun je iets algemeen ontdekken over het aantal kniplijnen. We onderzoeken vellen papier die onderverdeeld zijn in verschillende aantallen kaartjes. Ook het aantal rijen en kolommen varieert. We beginnen met een vel dat bestaat uit slechts één kaart, dus met slechts één rij en één kolom. We maken het aantal rijen en kolommen stapje voor stapje groter en kijken of er een regelmaat te ontdekken valt.

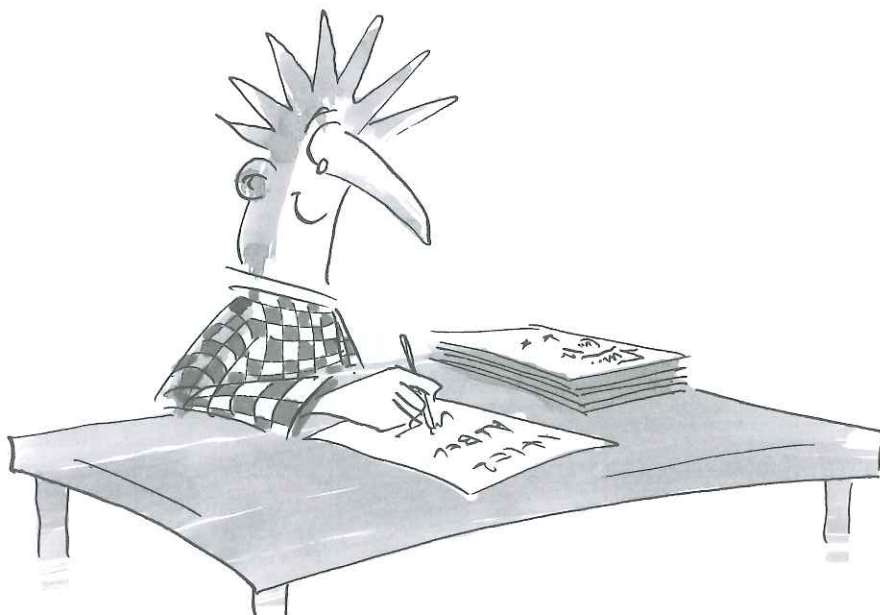
Vul in tabel 1 het aantal kniplijnen in dat je moet maken als je eerst alle verticale lijnen knipt. Kijk goed naar het aantal kniplijnen dat er iedere rij of kolom bijkomt.

Let op: De buitenranden van het vel hoeven nooit uitgeknipt te worden!

Kniplijnen aantal kolommen aantal rijen	1	2	3	4	5	6	q
1							
2							
3							
4							
5							
6							
p							

tabel 1: eerst alle verticale lijnen knippen

- 4
- 4a Hoeveel kaartjes zijn er bij p rijen en q kolommen?
- 4b Wat heb je als aantal kniplijnen ingevuld bij p rijen en q kolommen?
- 5 Wat is het aantal kniplijnen bij q rijen en p kolommen?
- 6 Wat wil dit zeggen over het verschil tussen eerst horizontaal of eerst verticaal knippen?
- 7 Nu kun je opdracht 2 maken met behulp van bovenstaande resultaten. Heb je opdracht 2 al gemaakt, dan kun je je antwoorden ermee controleren.



Toets 1

- 1 De loterijen uit Les 1 en Les 2 zullen verlies lijden als het aantal verkochte loten te groot is. Bedenk zelf regels voor een loterij met geldprijzen waarbij er geen verlies zal zijn. Doe dit alleen of samen met een andere *topklasser*.

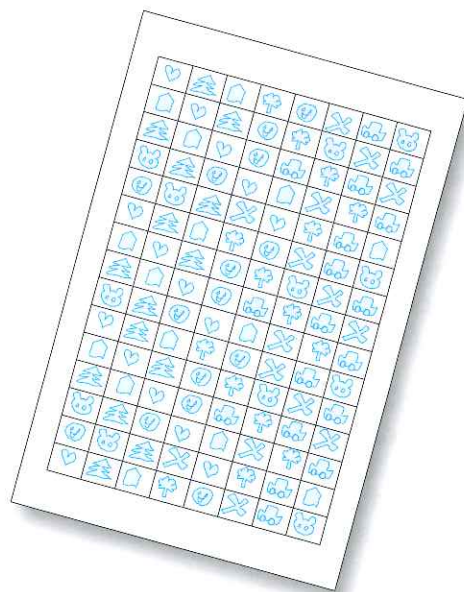
Gebruik de ruimte op deze bladzijde om aantekeningen te maken over je of jullie ideeën. Maak vervolgens een reclameposter voor de loterij met daarop alle regels en voeg een of meer illustraties toe om de aandacht op de loterij te vestigen.

Verwerk in de regels voor de loterij de volgende uitgangspunten:

- Elk lot kost 10 euro.
- Elk aantal verkochte loten tot aan 500 levert een redelijke opbrengst op voor het goede doel.
- Voor deelnemers is er kans op aantrekkelijke geldprijzen.

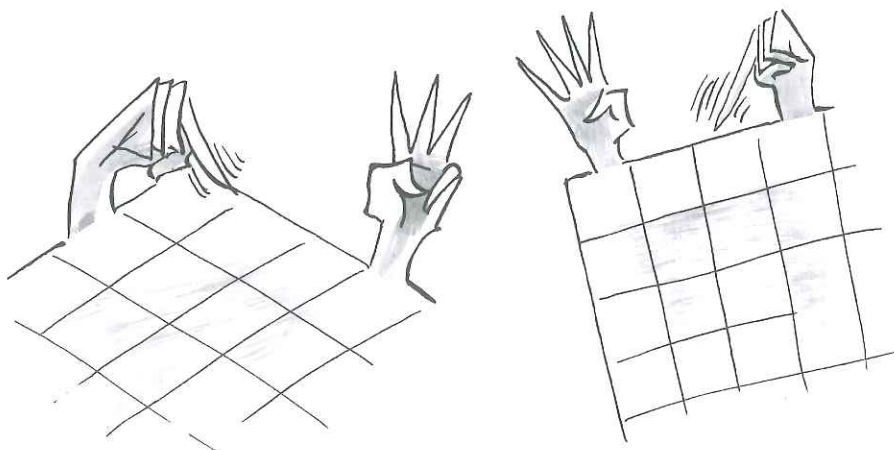


- 2 In Les 3 en Les 4 ging het over kaartjes uit een vel papier knippen. Je kon ontdekken dat het aantal zogenoemde kniplijnen bij p rijen en q kolommen $p \times q - 1$ bedraagt. De buitenranden van de buitenste kaartjes werden daarbij niet meegeteld, omdat ze samenvielen met de rand van het vel.



In bovenstaande afbeelding vallen de buitenranden van de buitenste kaartjes wel binnen het grotere vel. In de volgende opgaven moet je ervan uitgaan, dat alle buitenranden ook uitgeknipt worden.

- 2a Wat is nu het kleinste aantal kniplijnen bij p rijen en q kolommen?
- 2b Bedenk een indeling met meer dan één rij en meer dan één kolom, waarbij het aantal kniplijnen (inclusief de buitenranden) 80 bedraagt.
- 2c Bij precies 100 kniplijnen is er niet zo'n rechthoekige indeling te bedenken met meer dan één rij en meer dan één kolom. Noem 3 aantallen kniplijnen waarbij dat ook niet mogelijk is.



- 3 Hoeveel kniplijnen zijn er bij a rijen en b kolommen als elke rand van een kaartje als een aparte kniplijn geldt? Ofwel hoeveel afzonderlijke randjes zijn er bij a rijen en b kolommen? Alle buitenrandjes tellen mee!

Les 5 De machtige twee

Roos staat bij opa Henny met in haar ene hand een viool en in de andere hand zes kaartjes. "Waar zal ik mee beginnen opa, met mijn concertino of met de goocheltruc?" "Laten we eerst het denkwerk doen", zegt opa, en hij gaat er eens goed voor zitten.

Roos geeft opa de kaartjes en zegt: "Neem een getal onder de 64 in gedachten en kijk op welke van de zes kaartjes dat getal staat. Je mag het getal niet noemen, daar kom ik zelf wel achter."

"Het getal staat alleen op deze twee kaartjes", zegt opa en hij laat Roos een kaartje zien waarop linksboven als kleinste getal een 4 staat en een ander kaartje waarop de 8 linksboven als kleinste getal staat.

"Twaalf", roept Roos uit, "jij had twaalf in gedachten."

"Precies je leeftijd", zegt opa. "Slim van jou, hoor. Maar nu wil ik ook een truc laten zien." Dat vindt Roos best en ze luistert vol aandacht naar opa Henny.

"Jij noemt mij ook een getal, maar je mag de zes kaartjes niet aan mij laten zien.

Ik zal je dan zonder te kijken vertellen op welke kaartjes jouw getal staat."

"Ik kan jouw leeftijd niet kiezen", zegt Roos, "het gaat maar tot 64. Ik kies 37."

"Prima", zegt opa snel, "37 staat op drie kaartjes en wel op het kaartje met linksboven het getal 1, op het kaartje met linksboven de 4 en op het kaartje met linksboven 32."

Roos onderzoekt meteen of het klopt wat opa zegt.

"Je hebt gelijk, opa, hoe weet jij dat?"

"Dat weet ik door de machtige twee", zegt opa geheimzinnig en hij pakt pen en papier.

"Eerst moet ik je iets uitleggen over die machtige 2!", zegt opa en hij schrijft op het papier:

2

.....
 $2 \times 2 \times 2$

$2 \times 2 \times 2 \times 2$

$2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$
.....

"Wat moet er op het eerste rijtje puntjes staan?", vraagt opa.

Roos weet nog uit deel 1 van de Topklassers Wiskunde, dat 2×2 ook wel twee kwadraat genoemd wordt en dat het ook wordt geschreven als 2^2 .

Opa vertelt Roos dat het zo steeds verder gaat:

" $2 \times 2 \times 2$ zijn drie termen twee die je met elkaar vermenigvuldigt, dat kun je ook schrijven als 2^3 en je spreekt dat uit als twee tot de macht drie of ook wel twee tot de derde.

Omdat je steeds tweeën met elkaar vermenigvuldigt, spreken we van machten van twee. Het getalletje rechtsboven geeft aan hoeveel termen twee er zijn, bij 2^2 zijn dat er twee en bij 2^3 gaat het om drie termen twee."

"Wat moet er op het laatste rijtje puntjes staan", vraagt opa, "na twee tot de vijfde? Hoe groot is dat getal, hoe kun je het anders schrijven en hoe spreek je dat uit?"

1 Roos weet het antwoord. Jij ook?



- 2 Maak de rijen hieronder eerst aan de rechterkant verder af.
Onder de 2 staat 2^1 , immers er is één term 2.

...	2	4	8	...	...	...	...	...	...	...
...	2^1	2^2	2^3	...	...	...	...	...	...	...

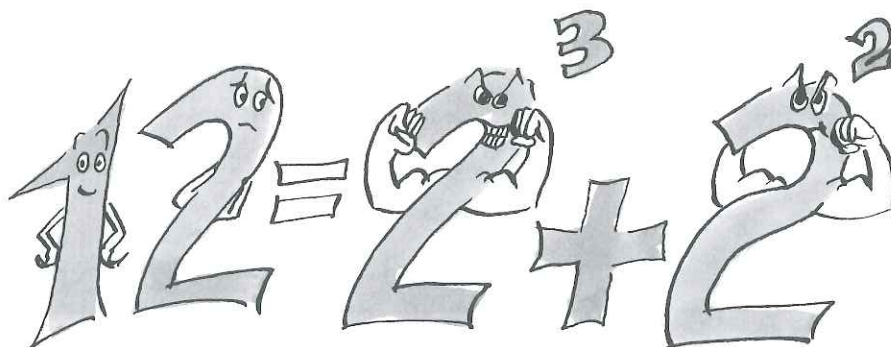
Wat verwacht je dat er aan de linkerkant staat? Kijk goed naar de regelmaat in de rij.

Van links naar rechts is steeds het dubbele, dus van rechts naar links is steeds de helft. Daarom komt er in de bovenste rij vooraan een 1 te staan. Het is een afspraak om de 1 als 2^0 te beschouwen. (misschien helpt het om hierbij te denken aan nul termen twee, pas bij de eerste keer verdubbelen, 2×1 , ontstaat er een 2)

De rij gaat aan de rechterkant door zo ver je maar wilt.

- 3 Hoe groot is 2^{12} ?

Opa vertelt Roos dat hij de twee zo machtig vindt omdat je met machten van twee alle hele getallen kunt maken. Kijk maar naar de getallen uit de goocheltruc.



- 4 Vul de ontbrekende machten in: $12 = 8 + 4 = 2^{\dots} + 2^{\dots}$ en $37 = 32 + 4 + 1 = 2^{\dots} + 2^{\dots} + 2^{\dots}$.

- 5 Schrijf de volgende getallen als combinatie van machten van twee, elke macht mag maar één keer gebruikt worden. (dus $9 = 4 + 4 + 1$ mag niet, wel $9 = 8 + 1$)

7 =

17 =

24 =

59 =

90 =

132 =

- 6 Probeer de getallen uit opgave 5 op een andere manier als combinatie van machten van twee te schrijven. Elke macht mag ook nu maar één keer gebruikt worden.
Wat valt je op?

Wat je nu hebt ontdekt, is heel belangrijk voor de goocheltruc van Roos.

Les 6 laat zien hoe je zelf de kaartjes voor deze truc kunt maken. Maar misschien heb jij de aanwijzingen in Les 6 niet nodig en wil je helemaal zelf het geheim van de truc ontdekken...

Ondertussen zit opa Henny al naar het concertino van Roos te luisteren.



Les 6

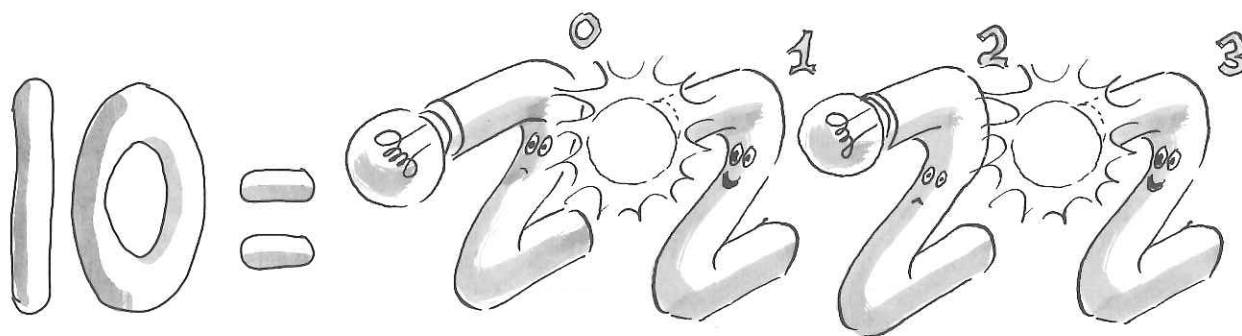
De goocheltruc

In Les 5 liet Roos opa Henny een goocheltruc zien. Opa wist maar al te goed wat die truc met machten van twee te maken had. Opa vertelde Roos dat je met machten van twee alle hele getallen kunt maken.

- 1 Welke machten van twee heb je nodig om alle hele getallen tot en met 1000 te kunnen maken? Bij het maken van een getal mag je iedere macht van twee hooguit één keer gebruiken.

Volgens opa kan dat met de eerste tien machten van twee. (2⁰ ook meegeteld)

"Vergelijk de machten van twee met lampjes", zo zegt hij, "als de macht meedoet om het getal te maken, dan is het lampje aan (een 1), en als de macht niet meedoet, dan is het lampje uit (een 0)."



- 2 Vul alle nullen en enen in voor de getallen 4, 5, 6, 7, 997, 998, 999 en 1000.

	2 ⁰	2 ¹	2 ²	2 ³	2 ⁴	2 ⁵	2 ⁶	2 ⁷	2 ⁸	2 ⁹
	1	2	4	8	16	32	64	128	256	512
1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
3	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
4	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
5	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
6	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
7	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
↓										
997	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
998	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
999	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
1000	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...

Op deze manier (bijvoorbeeld op ruitjespapier) kun je van alle getallen tot 64 uitzoeken hoe je ze kunt opbouwen uit machten van twee. Mogelijk ontdek je dan ook dat je voor ieder getal precies één manier kunt vinden om de nullen en enen te plaatsen. Probeer maar eens om het getal 16 te maken met behulp van de eerste vier lampjes (1, 2, 4, en 8). Lukt dat?

Heb jij nu genoeg informatie om zelf kaartjes voor de goocheltruc te maken?

Zo ja, vraag dan aan je leerkracht of je de kaartjes op de computer mag maken.

Een truc die mooi vormgegeven is, maakt nog meer indruk.

Wil je liever enkele aanwijzingen, dan vind je die op de volgende pagina.

Hoe maak je de goocheltruc met machten van 2?

de kaartjes

In de truc gebruik je kaartjes met getallen.

Eerst ga je onderzoeken welke getallen er op de kaartjes moeten staan.

Doe je de truc met getallen onder de 64, dan kun je voor die getallen een schema maken.

- 3 Welke lampjes (machten van twee) heb je dan nodig? En hoeveel kaartjes?

Bij iedere macht maak je een kaartje waarop je dat getal linksboven zet.

Op het kaartje met linksboven de 1 zet je verder alle andere getallen onder de 64 waarbij het 1-lampje brandt. Dat zijn dus alle getallen waarbij je de 1 nodig hebt om het getal te schrijven als combinatie van machten van twee.

In de afbeelding hieronder is al een deel van de getallen ingevuld.

1	3	5	7	9	11	13	15
17	19	21	23	25	27	...	...
...	...	...	...	...	...	...	...
...	...	...	...	...	...	...	...

Op het kaartje met de 2 linksboven zet je alle getallen waarbij het 2-lampje brandt.

Op soortgelijke manier maak je ook een kaartje voor de 4 (met daarop de getallen waarbij het 4-lampje brandt), een kaartje voor de 8, een kaartje voor de 16 en een kaartje voor de 32.

de truc

Vraag de persoon met wie je de truc doet om in gedachten een getal onder de 64 te kiezen. Vraag hem of haar ook om de kaartjes aan te wijzen waarop dat getal staat. Jij kijkt dan razendsnel naar de getallen linksboven.



- 4 Hoe gaat de truc nu verder?

Misschien wil jij liever de truc maken voor getallen onder de 128. Dat kan natuurlijk ook.

- 5 Hoeveel kaartjes moet je dan maken? En hoeveel getallen staan er dan op ieder kaartje?

Les 7

Slingers

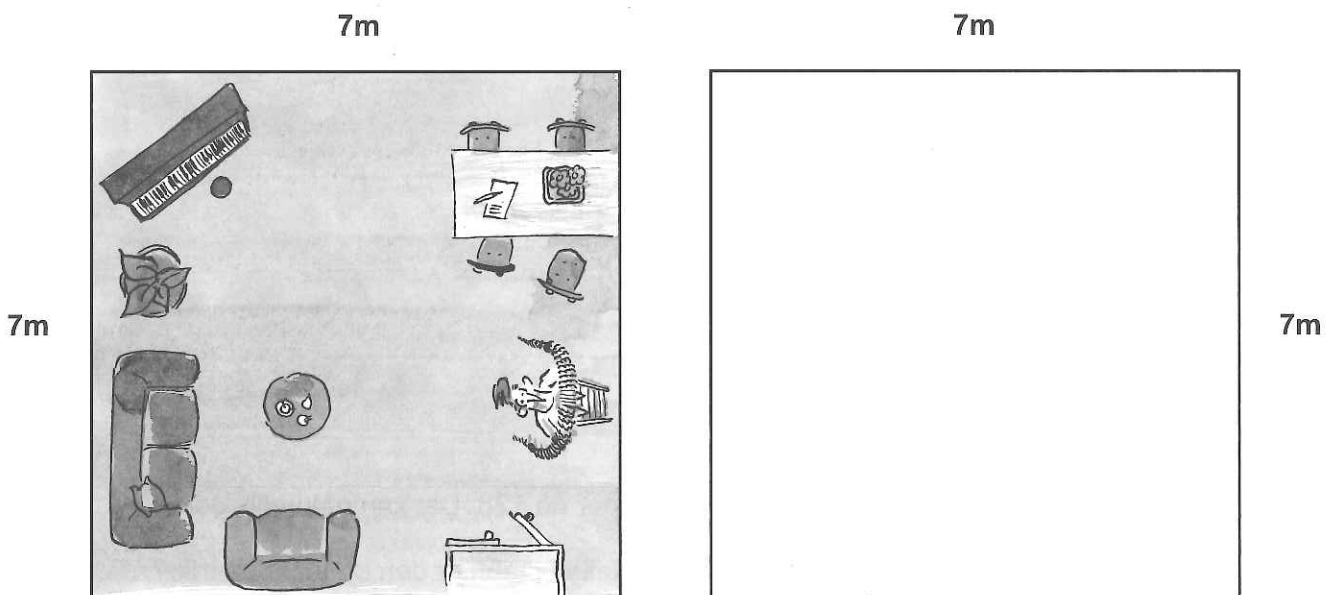
Wieke en Koen zijn druk in de weer met de voorbereidingen voor het feest dat komen gaat. Wieke oefent achter de piano een aantal vrolijke deuntjes en Koen heeft net slingers gekocht. "Hoe zullen we de slingers ophangen?", vraagt Koen. "We gaan het onszelf niet te moeilijk maken", zegt Wieke, "op elk van de vier muren maken we bovenaan één ophangpunt waar een slinger begint en waar een andere eindigt." "Als dat maar lukt, de slingers kunnen per stuk maximaal vijf meter overbruggen", weet Koen te vertellen. Vervolgens gaan de twee aan de gang met het opmeten van de kamer. Die blijkt zeven bij zeven meter in het vierkant te zijn. Bovendien is het plafond niet zo hoog, dus willen Wieke en Koen de slingers zo ophangen, dat niemand tegen de slingers aan hoeft te lopen. Dus de ruimte tussen de vier slingers moet zo groot mogelijk zijn.



- 1 Hoe kunnen Wieke en Koen de slingers volgens jou het beste ophangen? Teken de slingers in de lege plattegrond en zet de afmetingen erbij.

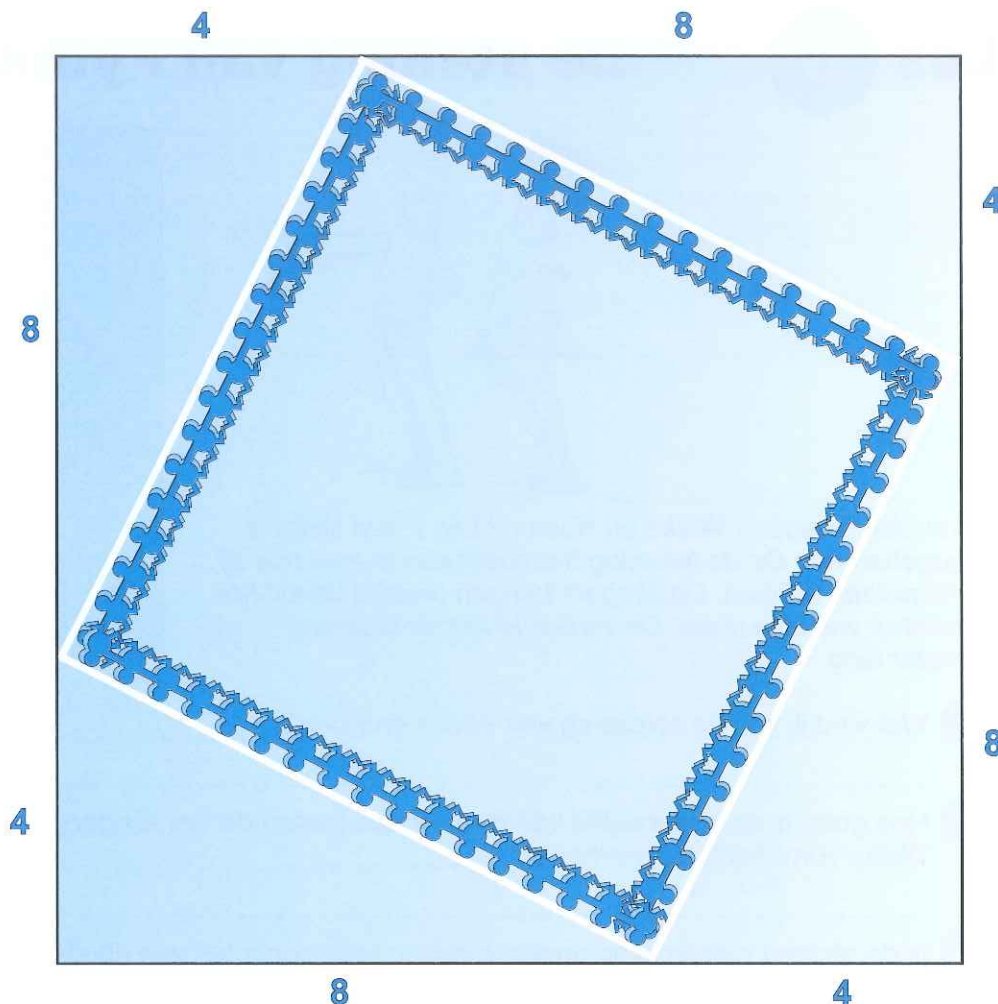
Eerst nog even de gegevens op een rijtje:

- de kamer is vierkant, 7 bij 7 meter
- op elk van de vier muren komt één ophangpunt
- de afstand tussen de ophangpunten is ten hoogste 5 meter, meer mag echt niet!
- het stuk tussen de vier slingers heeft een maximale oppervlakte



Op de volgende pagina staan enkele opdrachten die je kunnen helpen bij het vinden van oppervlaktes. Misschien vind je het prettiger om die eerst te maken.

In de tekening hiernaast zie je een (voor de duidelijkheid) lege kamer van 12 bij 12 meter. Vier slingers zijn opgehangen op een afstand van vier meter van de hoekpunten van de kamer. We zullen nu een manier laten zien om de oppervlakte van de vierhoek tussen de slingers te bepalen. Daarbij gebruiken we de vier driehoeken erbuiten. De lengte van de slingers hebben we niet nodig.

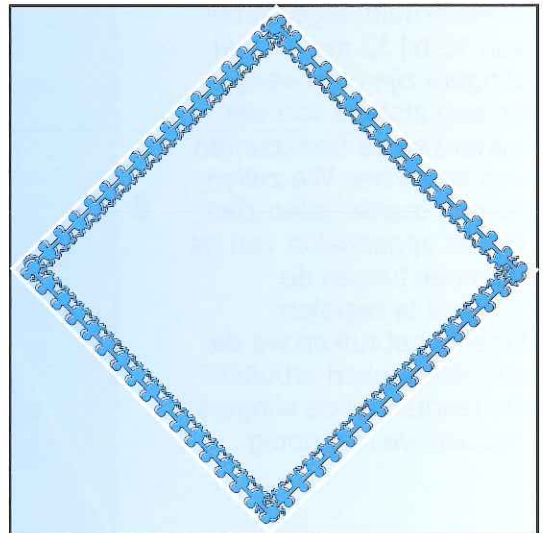


- 2 De slingers vormen met de wanden van de kamer vier driehoeken. Hoe groot is de oppervlakte van die driehoeken samen?
- 3 Hoe groot is de oppervlakte van de hele kamer?
- 4 Hoe groot is dus de oppervlakte van de vierhoek tussen de slingers?
- 5 Welke vorm heeft die vierhoek?
- 6 Schat de afstand tussen twee opeenvolgende ophangpunten, tussen welke twee hele getallen (in meters) ligt die afstand? Hoe lang denk je dat de slingers ongeveer zijn?





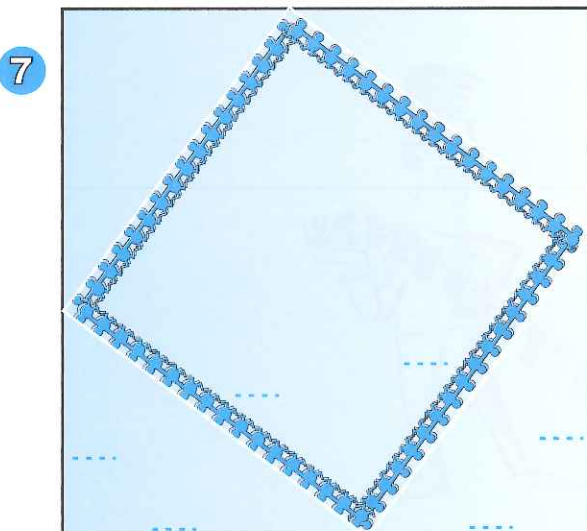
Inmiddels hebben Wieke en Koen uit Les 7 hun slingers opgehangen. Op de tekening hiernaast kun je zien hoe zij dit gedaan hebben. De slingers hangen precies vanuit het midden van elke muur. De vierkante kamer is zeven meter lang.



- 1 Wat vind jij van de oplossing van Wieke en Koen?
- 2 Hoe groot is de oppervlakte van de vierhoek tussen de vier slingers? Welke vorm heeft die vierhoek?
- 3 Is de afstand tussen twee opeenvolgende ophangpunten van de slingers meer dan vijf meter, minder dan vijf meter of precies vijf meter? Leg ook uit waarom dat zo is.

Er is een manier om de slingers op te hangen waarbij die afstand wel precies vijf meter is en waarbij de vier slingers ook een vierkant vormen. Ook dan hebben alle vier de omliggende driehoeken dezelfde vorm en zijn ze even groot.

- 4 Hoe groot is de oppervlakte tussen de vier slingers in dat geval?
- 5 Hoe groot is dan de oppervlakte van elk van de vier driehoeken eromheen?
- 6 Met de gegevens die we hebben, kunnen we de lengte en breedte van de vier driehoeken vinden. We weten om te beginnen hoe lang de lengte en de breedte van zo'n driehoek samen zijn. Vervolgens weten we ook de oppervlakte van zo'n rechthoekige driehoek. Welke lengte en breedte hebben de rechthoekige driehoeken?

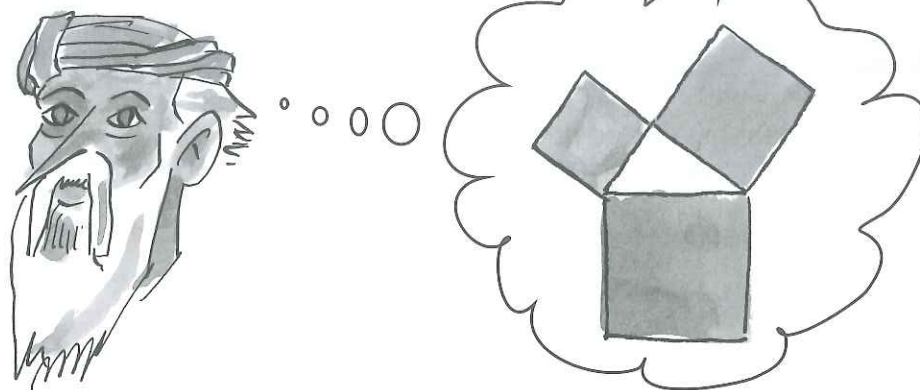


Hiernaast zie je de bedoelde oplossing. De slingers vormen een vierkant en de afstand tussen de ophangpunten is precies vijf meter. De tekening is op schaal.

Zet op de stippellijntjes de werkelijke afmetingen in de tekening.

Zonder nu meteen een volledig bewijs te willen geven, merken we hier op dat we in de buurt zijn gekomen van ...

de stelling van Pythagoras!



Kijk maar:

De oppervlakte van de kamer is $7 \times 7 \text{ m}^2 = (3 + 4) \times (3 + 4) \text{ m}^2$.

Dat kun je ook schrijven als $3 \times 3 + 4 \times 4 + 3 \times 4 + 4 \times 3 \text{ m}^2$.

Haal je de oppervlakte van de vier driehoeken eraf, dat is $4 \times \frac{1}{2} \times (3 \times 4)$ ofwel $2 \times (3 \times 4) \text{ m}^2$, dan hou je $3 \times 3 + 4 \times 4 \text{ m}^2$ over als oppervlakte van het vierkant tussen de slingers.

Dus van de ene kant is de oppervlakte van dat vierkant $3 \times 3 + 4 \times 4 \text{ m}^2 = 3^2 + 4^2 \text{ m}^2$.

Van de andere kant is het vierkant 5 m lang, dus de oppervlakte is $5 \times 5 \text{ m}^2 = 5^2 \text{ m}^2$.

Hieruit volgt:

$$3^2 + 4^2 = 5^2$$

De Griekse wiskundige Pythagoras stelde een verband vast dat voor alle rechthoekige driehoeken geldt. Zijn stelling wordt vaak gebruikt om met behulp van de lengtes van de rechthoekszijden de lengte van de schuine zijde van een rechthoekige driehoek te berekenen.

Kijk nog maar eens naar de kamer van 12 bij 12 meter in Les 7. De rechthoekige driehoek linksonder heeft een zijde van 4 meter en een zijde van 8 meter.

- 8 Hoe groot is de oppervlakte van het vierkant tussen de slingers?

.....

.....

.....

.....

- 9 Hoe groot is de lengte c van de schuine zijde van de driehoek linksonder? Is dat meer of minder dan 9 meter?

.....

.....

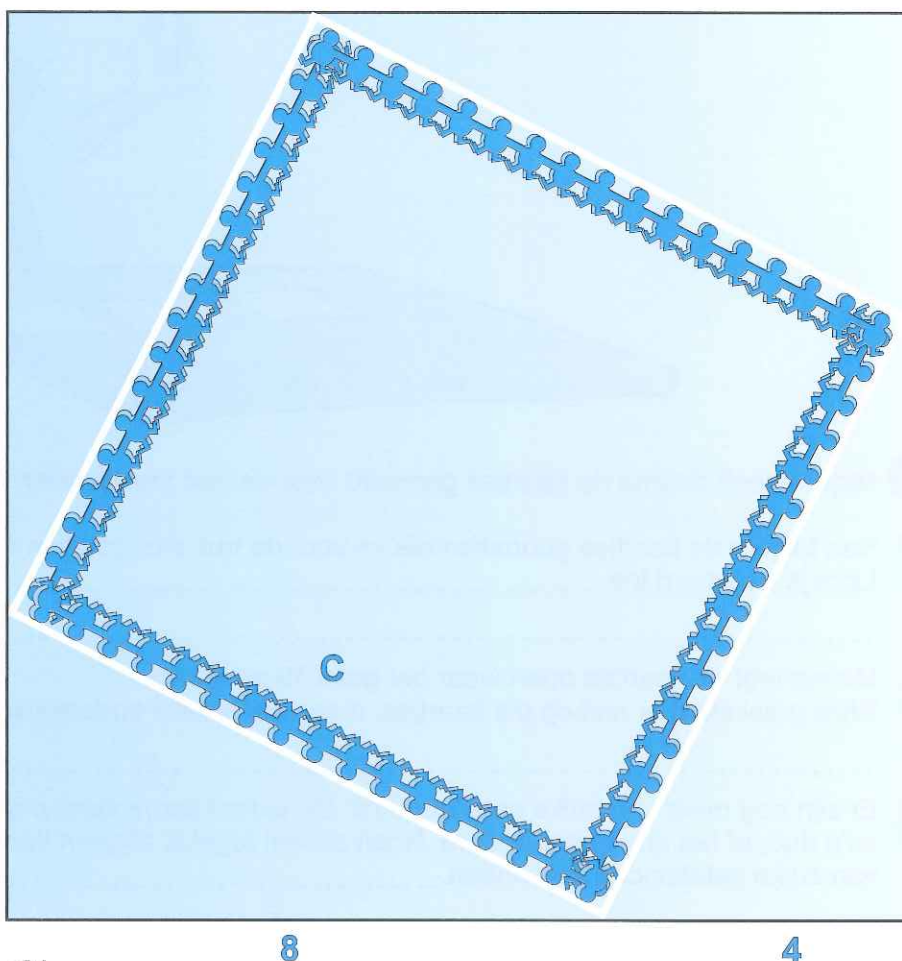
.....

.....

Ook hier kun je de oppervlakte van het kleine vierkant op twee manieren zien.

Met behulp van de driehoeken op soortgelijke wijze als bij de kamer van 7 bij 7 m, als $4^2 + 8^2$, en met behulp van de lengte c als c^2 .

Probeer maar eens. Dan bewijs je daarmee dat $4^2 + 8^2 = c^2$!



Toets 2

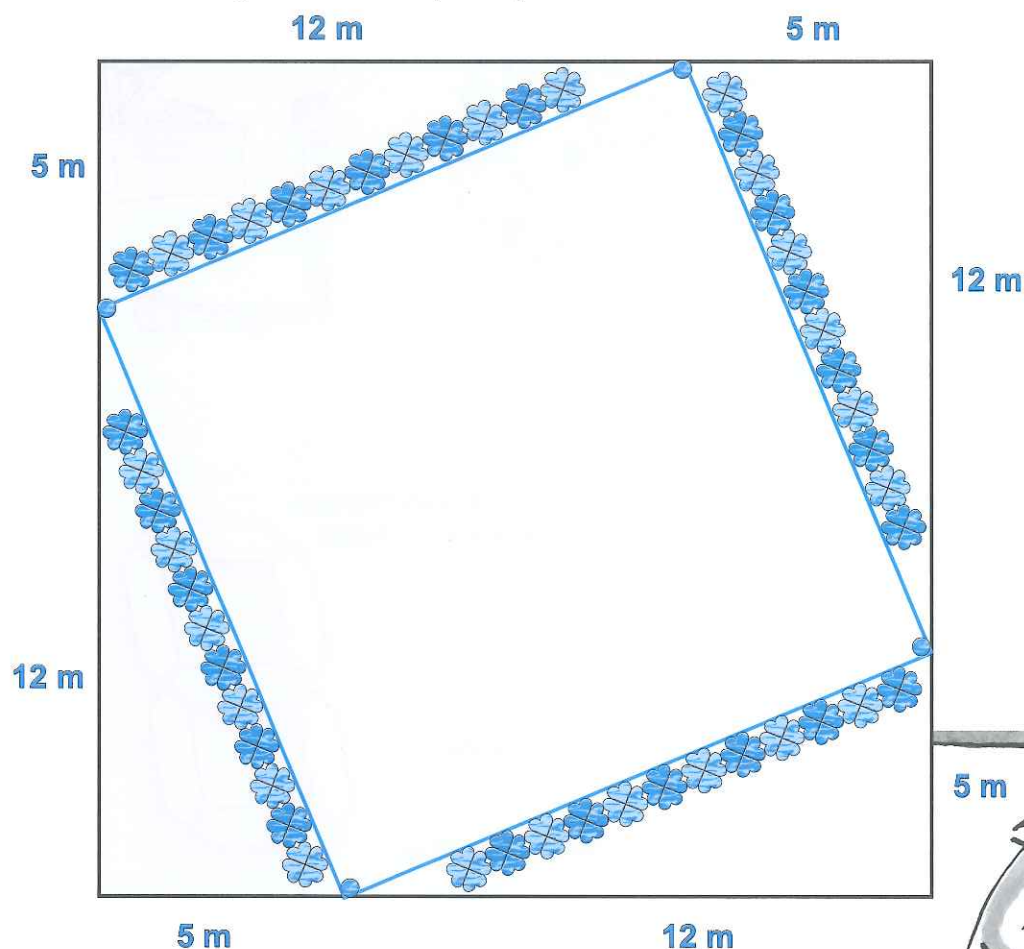
- 1** Mirjam doet met haar moeder de goocheltruc uit Les 6.
Mirjam heeft eerst kaartjes gemaakt voor de getallen vanaf 1 tot en met 31.
Haar moeder heeft een getal in gedachten genomen. Het getal staat op drie kaartjes, op het kaartje met linksboven de 1, op het kaartje met de 8 en op het kaartje met de 16.

- 1a Welk getal heeft moeder in gedachten?
- 1b Welke kaartjes zou moeder aanwijzen als ze het getal 22 had gekozen?
- 1c Hoeveel kaartjes heeft Mirjam gemaakt?
- 1d Mirjam legt de kaartjes apart waar het getal 19 op staat.
Welk getal staat er *niet* op die kaartjes, maar *wel* op alle andere kaartjes?



- 2** Mirjam heeft daarna de kaartjes gemaakt voor de truc met getallen tot en met 63.
- 2a Kan Mirjam de kaartjes gebruiken die ze voor de truc met getallen tot 32 maakte?
Licht je antwoord toe.
- 2b Mirjam legt de kaartjes apart waar het getal 19 op staat.
Welk getal staat er *niet* op die kaartjes, maar *wel* op alle andere kaartjes?
- 2c Er zijn nog meer van zulke getallenduo's. Op ieder kaartje staat precies één van de twee getallen van zo'n duo, of het ene of het andere. Nooit allebei tegelijk of geen van beide getallen. Probeer nog drie van zulke getallenduo's te vinden.

- 3 Net als in de lessen 7 en 8 is het in deze toets ook feest. Het feest vindt plaats in een zaal van een kasteel dat binnenkort een grondige opknapbeurt krijgt. Daarom kwam een kunstenaar op het idee om geen slingers op te hangen, maar de slingers op het plafond te schilderen. In de afbeelding hieronder zie je het plafond van de feestzaal na het schilderen.



- 3a De kunstenaar deed erg zijn best. Per vier meter slinger gebruikte hij 125 ml verf. Hoeveel verf gebruikte de kunstenaar voor de vier slingers samen?

.....

Dezelfde kunstenaar schilderde in het vierkant tussen de slingers nog twee vierkante taarten, een rode met aardbeien en een gele met banaan. Hij ging er vanuit dat de meeste bezoekers van aardbeien houden, dus maakte hij de rode taart groot, wel 144 m^2 , en de gele taart klein, 25 m^2 .

Voordat de kunstenaar begon met schilderen was het plafond wit.

- 3b Teken de twee taarten in het gebied tussen de vier slingers. Het maakt niet uit op welke plaats in het vierkant je de twee taarten tekent. Je kunt bijvoorbeeld in de ene hoek de rode taart tekenen en in de hoek ertegenover de gele taart, of de ene taart in het midden van de andere taart, elke keuze is goed. Met oranje kun je aangeven waar de rode en de gele taart elkaar overlappen.

Leg uit waarom het oranje stuk taart (de overlapping) even groot is als het deel van het vierkant tussen de slingers dat wit blijft. Klopt dat ook in jouw tekening?

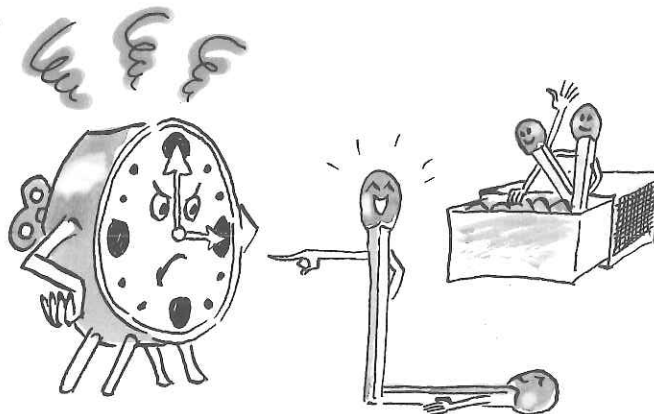
.....



Les 9

Het tijdspel deel 1

Deze les gaat over een tijdspel. Het is de bedoeling dat jij het spel met andere kinderen gaat spelen. Maar dat is niet alles. Het spel is nog niet af en jij kunt meehelpen om het te verbeteren. Vertel je leerkracht dat je deze les wilt gaan doen en vraag of dat vandaag uitkomt. Vraag ook om een doosje lucifers. De lucifers (of andere gelijkvormige staafjes) heb je nodig om digitale cijfers te vormen.



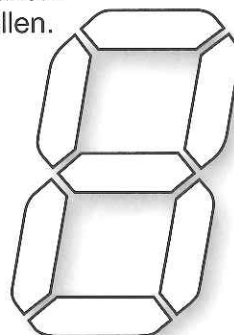
De les bestaat uit een aantal stappen:

- stap 1** Beantwoord als voorbereiding enkele vragen over digitale cijfers.
- stap 2** Lees de spelregels nauwkeurig, zodat jij het spel goed snapt.
- stap 3** Leg het spel uit aan drie andere kinderen.
- stap 4** Speel met elkaar het spel twee of drie keer.
- stap 5** Bespreek wat er niet klopt aan het spel of wat het spel beter kan maken.
- stap 6** Ga zelf (of samen met de anderen) extra of betere spelregels opstellen.
- stap 7** Speel het spel met de nieuwe regels.

Veel spelplezier bij het spelen én verbeteren!

stap 1

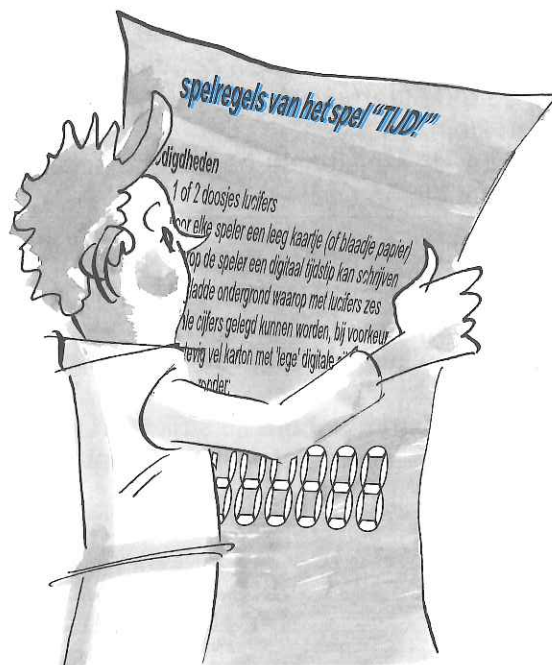
De digitale cijfers op een klok zijn vaak opgebouwd uit kleine staafjes. In het voorbeeld hiernaast zie je zo'n cijfer acht.



- 1 Hoeveel lucifers heb je nodig om op deze manier alle cijfers van 0 tot en met 9 naast elkaar te leggen?
- 2 Met hoeveel lucifers leg je op de digitale manier vier over half een 's middags? De puntjes tussen de uren en de minuten (zoals bijvoorbeeld bij 16:05 uur) hoef je niet met lucifers te leggen. En met hoeveel lucifers leg je vier over half een 's nachts? (alle nullen zijn te zien)
- 3 Voor welke digitale tijd heb je de meeste lucifers nodig? En voor welke het minste aantal?

Controleer in het antwoordenboek de antwoorden die je gegeven hebt. Dat kan misverstanden voorkomen bij de volgende stappen.

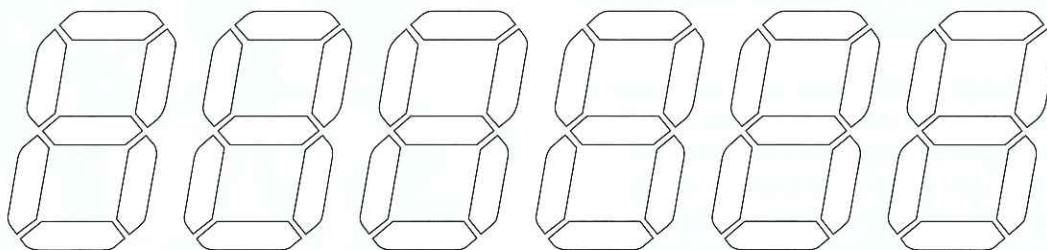
- stap 2** Lees de spelregels op de volgende pagina.



spelregels van het spel "TIJD!"

Benodigdheden

- 1 of 2 doosjes lucifers
- voor elke speler een leeg kaartje (of blaadje papier) waarop de speler een digitaal tijdstip kan schrijven
- een gladde ondergrond waarop met lucifers zes digitale cijfers gelegd kunnen worden, bij voorkeur een stevig vel karton met 'lege' digitale cijfers, zoals hieronder:



Het spel

Elke speler schrijft in het geheim een digitale tijd op zijn kaartje en legt dat kaartje omgekeerd voor zich op tafel. De lucifers worden op een stapel gelegd waar iedere speler van mag pakken. De bedoeling is om zo snel mogelijk met de lucifers de cijfers te vormen die bij je eigen geheime tijd horen.

Die cijfers worden gevormd doordat de spelers om beurten één lucifer op een lege 'luciferplek' mogen leggen. Dat hoeft niet op een bepaalde volgorde, elke lege plek mag opgevuld worden. De kunst is nu ervoor te zorgen zelf de laatste lucifer van een cijfer te leggen. Zodra je door een lucifer te leggen een cijfer compleet maakt, roep je "tijd!" en mag jij dat cijfer op de zichtbare kant van je kaartje noteren. Vervolgens worden alle lucifers van dat cijfer weer op de stapel gelegd en gaat het spel verder.

Ook door een lucifer weg te nemen, kun je een cijfer compleet maken. Wie aan de beurt is, mag er voor kiezen een lucifer weg te nemen in plaats van er een neer te leggen. Als je dat doet, mag je pas in de volgende beurt weer een lucifer neerleggen. Maar let op: een lucifer die net is neergelegd, mag niet meteen door de volgende speler worden weggenomen!

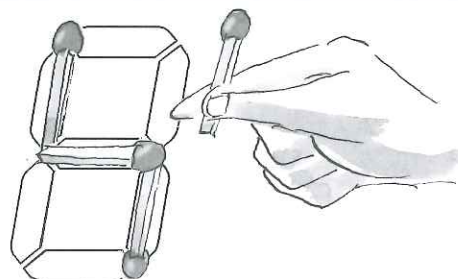
Winnaar is de speler die het eerst alle vier de cijfers heeft verzameld die bij zijn geheime tijd horen. De volgorde waarin de cijfers verzameld worden, is niet belangrijk.

stap 3 tot en met stap 7

Is het spel duidelijk, ga dan verder met stap 3 tot en met stap 7. Is het spel niet duidelijk, vraag dan of je er met een klasgenoot naar mag kijken, twee weten vaak meer dan één.

Denk bij stap 5 bijvoorbeeld aan zaken als:

- maakt het uit welke geheime tijd je opschrijft, zijn alle tijden even moeilijk?
- wordt het spel beter met de regel dat je een lucifer mag verplaatsen naar een andere plek, in plaats van dat je een lucifer weg mag nemen?
- mag je ook "tijd!" roepen, wanneer een andere speler een cijfer legt?
- hoeveel lege cijfers gebruik je bij vier spelers, hoeveel bij drie of vijf spelers?



Een echte onderzoeker herhaalt de stappen 5, 6 en 7 tot hij of zij tevreden is. Ben je tevreden over de nieuwe regels? Zet dan als je wilt ook stap 8.

stap 8

Stuur de spelregels die je hebt bedacht naar uitgeverij Bekadidact.

Les 10

Het tijdspel deel 2

In deze les gaan we door op het tijdspel uit Les 9. Er kan bijvoorbeeld discussie ontstaan over het aantal lucifers. Misschien was dat in jouw groepje ook zo, maar misschien ging het bij jullie wel heel anders.

Appie, Chrisje, Nikkie en Jurgen vragen zich af of het moeilijker is om te winnen, als je cijfers uit meer lucifers bestaan.

Appie en Chrisje denken van wel. Voor een 9 heb je meer beurten nodig dan voor een 7. Nikkie en Jurgen denken dat het juist een voordeel kan zijn als je veel lucifers nodig hebt. Er worden steeds nieuwe lucifers aangelegd en je kunt langer geheim houden naar welke cijfers je zoekt.



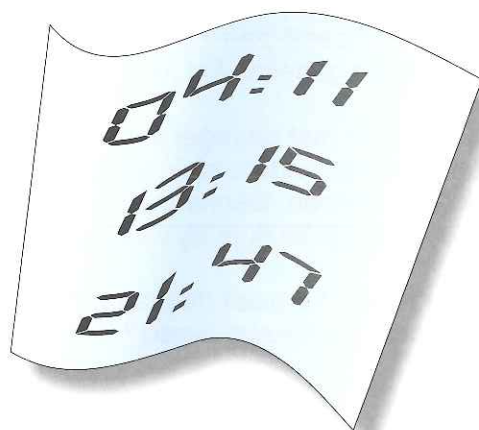
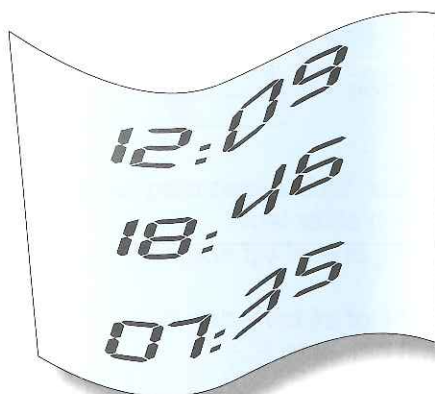
- 1 Appie en Nikkie stellen voor om alle tijdstippen vanaf 00.00 uur tot en met 23.59 uur in groepen te verdelen. Tijdstippen die met eenzelfde aantal lucifers gelegd worden, komen bij elkaar in één groep. Jurgen en Chrisje zetten van elke groep de gegevens op papier.

1a Hoeveel tijdstippen moeten er verdeeld worden?

1b Schrijf van elke groep een tijdstip op.

1c Beredeneer waarom er minstens één groep is met meer dan 100 tijdstippen.

1d Appie en Chrisje willen in de spelregels opnemen dat iedereen als geheime tijd een tijd moet nemen die met hetzelfde aantal lucifers te leggen is. Wat vind jij van die spelregel?

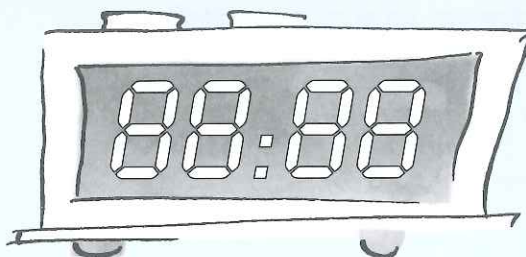


Een ander groepje heeft de spelregels veranderd en meteen ook de naam:

De spelregels van het spel "OP TIJD!"

Benodigdheden:

- 1 doosje lucifers
- een blaadje papier voor iedere speler
- als spelbord een stevig vel karton met vier 'lege' digitale cijfers



Het spel

Elke speler schrijft in het geheim een digitale tijd op een blaadje en legt dat blaadje omgekeerd voor zich op tafel. De lucifers worden op een stapel gelegd waar iedere speler van mag pakken. De spelers maken met behulp van de lucifers één digitale tijd. De bedoeling is om die tijd zo dicht mogelijk bij je eigen geheime tijd te laten uitkomen.

Een digitale tijd kan ontstaan doordat de spelers om beurten één lucifer op een lege 'luciferplek' mogen leggen. Dat hoeft niet op een bepaalde volgorde, elke lege plek mag opgevuld worden. Wie aan de beurt is, mag ook een lucifer verplaatsen in plaats van een nieuwe neer te leggen. Zodra op een van de vier plaatsen een cijfer compleet is, mag daar niets meer aan veranderd worden. Het moet natuurlijk wel een cijfer zijn dat in een digitaal tijdstip kan voorkomen. Als er op de eerste cijferplek een 4 staat, moet er verder gespeeld worden tot er een cijfer staat dat daar wel mag staan.

De vier cijfers die zo ontstaan, vormen de winnende tijd. Degene die met zijn geheime tijd het dichtst bij de winnende tijd zit heeft het spelletje gewonnen.

Je kunt meerdere spelletjes spelen. Na ieder spel noteert elke speler hoeveel minuten hij met zijn geheime tijd van de winnende tijd af zit. Degene die op het eind de laagste totaaltijd heeft, is de winnaar, die was het meest 'op tijd'.

Jij hebt na Les 9 inmiddels ervaring met het uitproberen van een nieuw spel. Lijken de spelregels van "Op Tijd!" op jouw spelregels?

Speel het spel én wie weet, wil je ook dit spel nog verbeteren. Bekijk in dat geval nog eens de stappen in Les 9 en doe stap 3 tot en met stap 7. Schrijf hieronder wat je ervan vindt. Ook stap 8 mag je natuurlijk zetten.

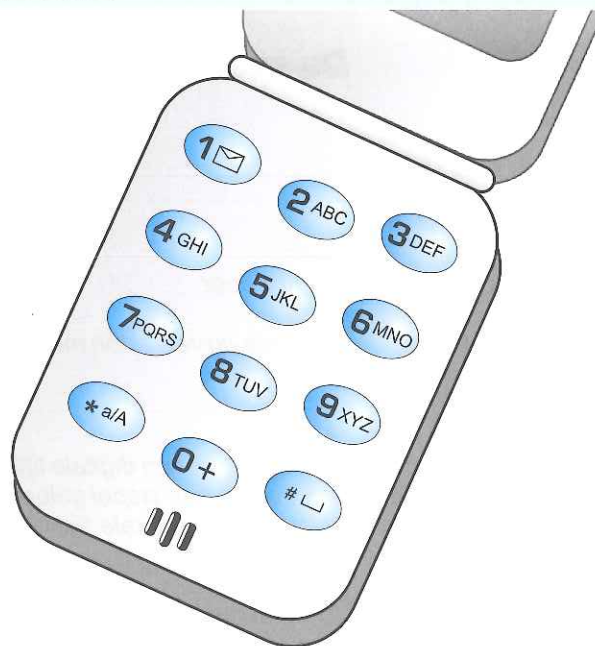


Les 11

Mobiele puzzels

Wie wel eens een sms'je stuurt, weet dat je met de cijfertoetsen op je mobiele telefoon letters kunt maken.

Hallo kun je krijgen door twee keer kort de 4 in te toetsen (h), daarna één keer de 2 (a), drie keer de 5 (l), nog eens drie keer de 5 (l) en tot slot drie keer de 6 (o).



Bekijk het volgende kruiswoordraadsel:

1	2	3
4		
5		

horizontaal

1. opening
4. meisjesnaam
5. om iets van te leren

verticaal

1. voor in je haar
2. Romeinse groet
3. kun je boodschappen in opbergen

Als je de puzzel oplost vind je:

horizontaal 1. gat 4. eva 5. les

verticaal 1. gel 2. ave 3. tas

Als we het antwoord *gat* op de mobiele telefoon intoetsen, kunnen we dat als volgt omschrijven:

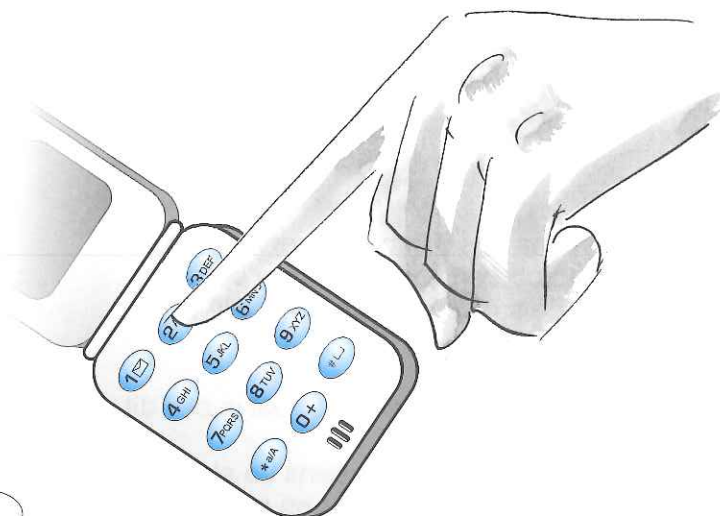
- de g van gat is 4.1 (toets 4, 1x indrukken)
- de a is 2.1 (toets 2, 1x)
- de t is 8.1 (toets 8, 1x).

We kunnen de puzzelomschrijvingen dus ook 'mobiel' geven:

horizontaal

verticaal

- | | |
|--------------------------|----------------|
| 1. (4.1) - (2.1) - (8.1) | 1. () () () |
| 4. (3.2) - (8.3) - (2.1) | 2. () () () |
| 5. (5.3) - (3.2) - (7.4) | 3. () () () |



1 Wat zijn de mobiele puzzelomschrijvingen van de verticale woorden?

De puzzel zal met deze omschrijvingen niet zo moeilijk op te lossen zijn. Maar dat verandert als we de volgorde van de cijfers veranderen. We schrijven alle cijfers van klein naar groot. De omschrijving van *gat* wordt dan 111248 in plaats van 4.1 - 2.1 - 8.1. De omschrijving van 4 horizontaal is op die manier 122338.

2 Wat zijn de omschrijvingen van de andere vier woorden uit de puzzel?

5 horizontaal		1 verticaal	
2 verticaal		3 verticaal	

3 Lukt het jou om de volgende puzzel op te lossen?

1	2	3
4		
5		

horizontaal

verticaal

1. 334478

1. 123358

4. 233356

2. 233347

5. 122357

3. 234567

Bedenk hierbij dat de cijfers die horen bij de letter in een bepaald vakje, zowel in een horizontale als in een verticale omschrijving staan.

Lukt het niet met de mobiele omschrijvingen alleen, dan vind je onderaan de bladzijde een hint.

4 Los ook de volgende puzzel op.

1	2	3
4		
5		

horizontaal

verticaal

1. 113367

1. 113367

4. 123336

2. 123336

5. 112378

3. 112378

Ook voor deze puzzel vind je onderaan de bladzijde een hint.

5 Bedenk nu zelf zo'n mobiele puzzel.

1	2	3
4		
5		

horizontaal

verticaal

1.

1.

4.

2.

5.

3.



Hint bij opdracht 3:

1 horizontaal is een dier.

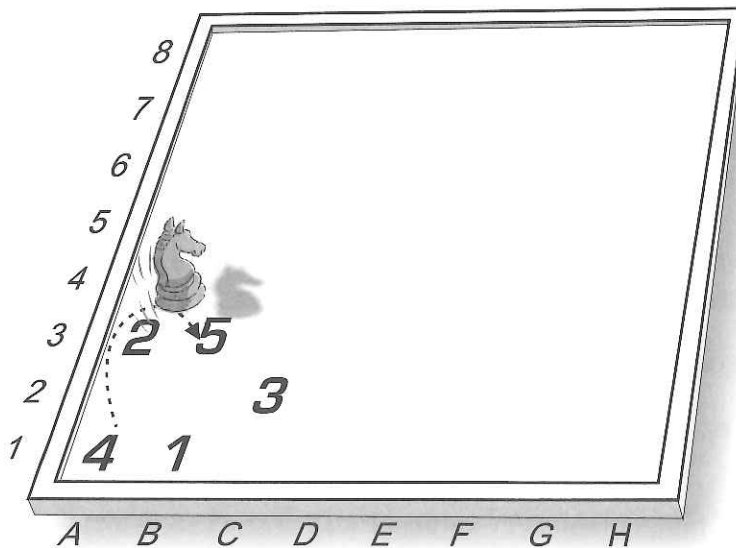
Hint bij opdracht 4:

De letter in het centrum van de puzzel is een medeklinker.

Les 12

Hoe ver komt jouw paard?

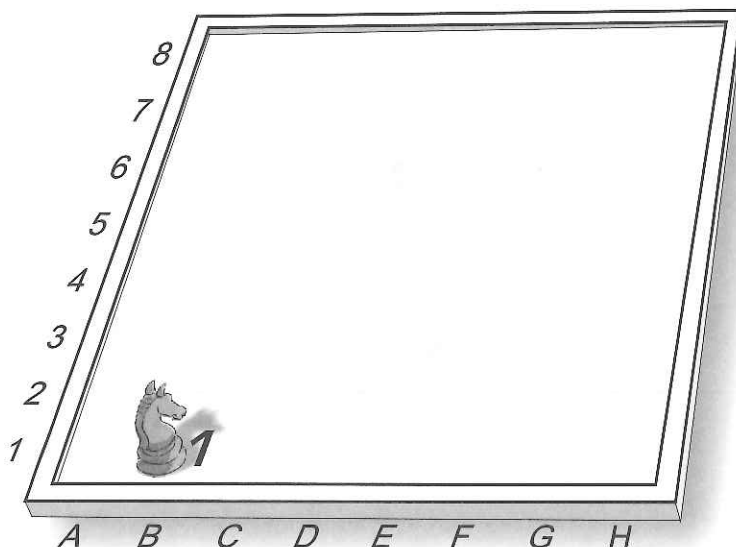
"Vijfenveertig! Een nieuw record!", roept Judith naar Max. Max heeft afgesproken om met Judith een partijtje te schaken als hij klaar is met zijn huiswerk. In afwachting daarvan speelt Judith met het paard een zelfbedacht spelletje.



Op ruitjespapier tekent Judith een schaakbord. Vanuit vak B1 maakt Judith met het paard sprongen, zoals zijn toegestaan in het schaakspel. Zij nummert elk vak waar het paard op springt en springt net zolang door tot ze niet meer verder kan. Een vak waarop het paard al heeft gestaan, mag ze niet opnieuw gebruiken.

De eerste keer dat ze het spelletje deed kwam ze tot eenentwintig. En jij?

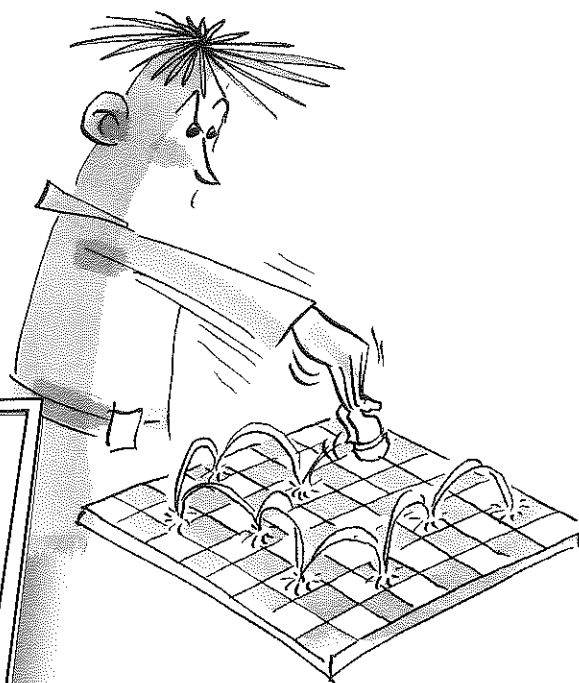
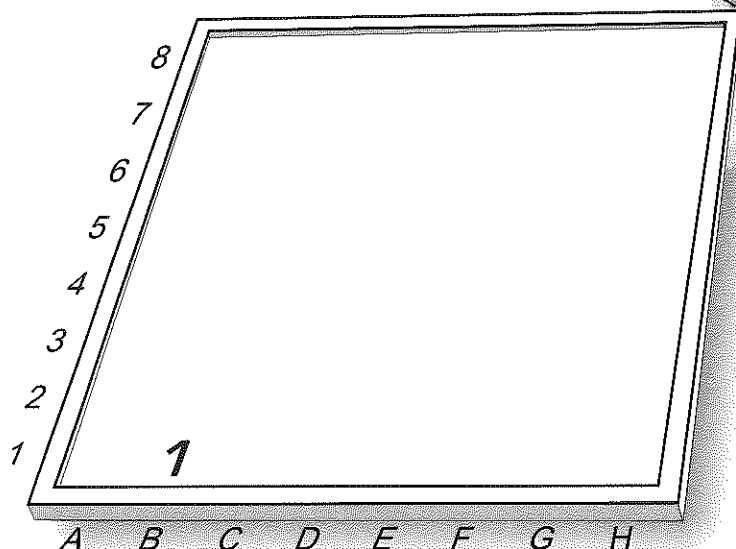
- 1 Ga door met springen op het bovenstaande schaakbord, zo lang als je kunt. Wat is het laatste getal dat je hebt opgeschreven?
- 2 Misschien wil je de eerste sprongen wel anders zetten. Probeer, als je tenminste nog niet tot vierenzestig gekomen bent, in het onderstaande schaakbord je poging van boven te verbeteren. De vaste startplaats van je paard in dit spel is vak B1.



Hoe ver kom je nu?

"Vierenzestig"! roept Max enkele dagen daarna. Hij is het spelletje ook gaan doen en is heel geduldig een systeem van springen gaan zoeken, waarbij je niet vastloopt.

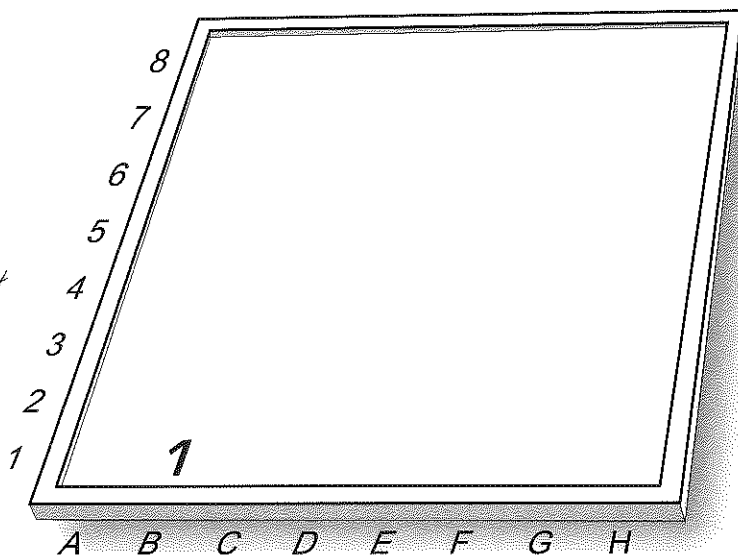
- 3 Gaat jou dat ook lukken?
Gebruik eerst ruitjespapier en noteer je beste poging hieronder.



Ondertussen zit Judith niet stil. Ook zij ontdekt een systeem om tot vierenzestig te komen.

- 4 Judith bedenkt dan ook nog de ultieme uitdaging. Wie vindt het eerst een manier om tot vierenzestig te komen waarbij je vanaf het vierenzestigste vakje weer terug in het eerste vakje (B1) kunt springen?

Ben jij Judith en Max voor? Vind jij zo'n oplossing?



Toets 3

- 1 In Les 10 maakten Jurgen en Chrisje groepen van tijdstippen die met eenzelfde aantal lucifers te leggen zijn. Onder hun aantekeningen bevond zich onder meer onderstaande tabel. De tabel is nog niet af. Onderzoek eerst hoe de tabel werkt. Bepaal vervolgens met welk aantal lucifers je het grootste aantal tijdstippen kunt leggen.

lucifers minuten →	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
aantal lucifers tijdstip = aantal lucifers minuten + aantal lucifers uren ↓ lucifers uren	...: 11 1	...: 17 1	...: 41 ...: 14 2	...: 51 ...: 31 ...: 21 ...: 47 ...: 15 ...: 13 ...: 12 7	...: 01 ...: 57 ...: 37 ...: 27 ...: 44 ...: 19 ...: 16 ...: 10 8	...: 43 ...: 42 ...: 18	...: 40	...: 48	...: 28	...: ...
4 11 :... 1	1 x 8	1 x 9	2 x 10							
5 17 :... 1	1 x 9	1 x 10								
6 14 :... 1	1 x 10	1 x 11								
7 12 :... 13 :... 15 :... 21 :... 4	4 x 11									
8 10 :... 16 :...										
9 18 :... 07 :...										
10 22 :...										
11 20 :... ...										
12 00 :... ...										
13 :...										

2 Los deze mobiele puzzel op.

	1			
2	r		3	
			a	
4				
	o		e	

horizontaal

verticaal

2. 1112223357

1. 1133346678

4. 1223335667

3. 11122336

Gebruik indien nodig de volgende omschrijvingen:

horizontaal

verticaal

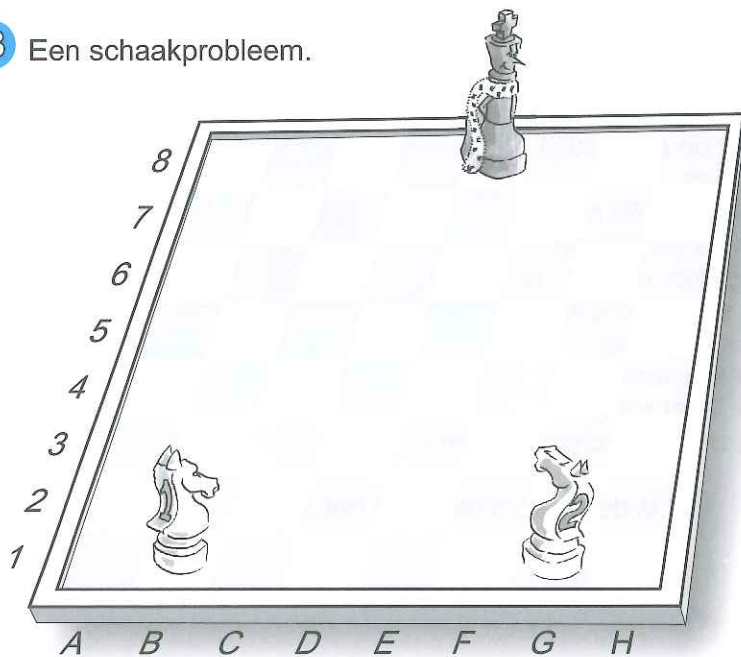
2. vurig dier

1. niet klein

4. te voet

3. lucht

3 Een schaakprobleem.



3a De zwarte koning blijft op E8 staan.

De witte paarden mogen steeds gelijktijd een zet doen.

Welke van de twee paarden kan de zwarte koning het eerst schaak zetten?

3b In hoeveel zetten kan dat het snelst?

Hoeveel zetten heeft het andere paard nodig om de zwarte koning schaak te zetten?

Les 13 Een oud kunstje

Je staat op het strand en ziet recht voor je een schip. Het schip ligt voor anker. Het lijkt ver weg en je wilt graag weten hoe ver het van de kust af is. Nu is het niet iedereen gegeven om over water te lopen, dus je moet een manier bedenken die je op het strand kunt uitvoeren.

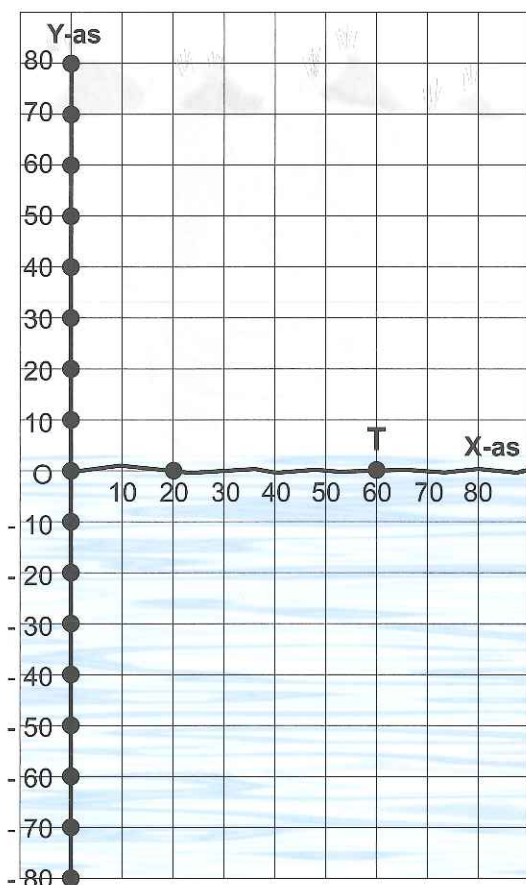
Je bent nu aanbeland bij een probleem waarvoor al heel lang geleden slimme mensen een meetkundige oplossing bedachten. Treed nu in hun voetsporen en ontdek hoe je zonder natte voeten een redelijke schatting van de afstand tot de boot kunt maken.

- 1 Heb jij een idee hoe je dit probleem kunt aanpakken?

.....

.....

In deze les gaan we op zoek naar een oplossing. We gebruiken voor de tekening een assenstelsel. (zie bijvoorbeeld Topklassers Wiskunde deel 1)



Toeschouwer T staat op de kustlijn, de X-as. T staat op 60 meter van de oorsprong O. Boven de X-as is het strand, onder de X-as is de zee. Precies voor zich ziet T het schip. (wij zien het schip nog niet)

- 2 Wat is de x-coördinaat van het schip?

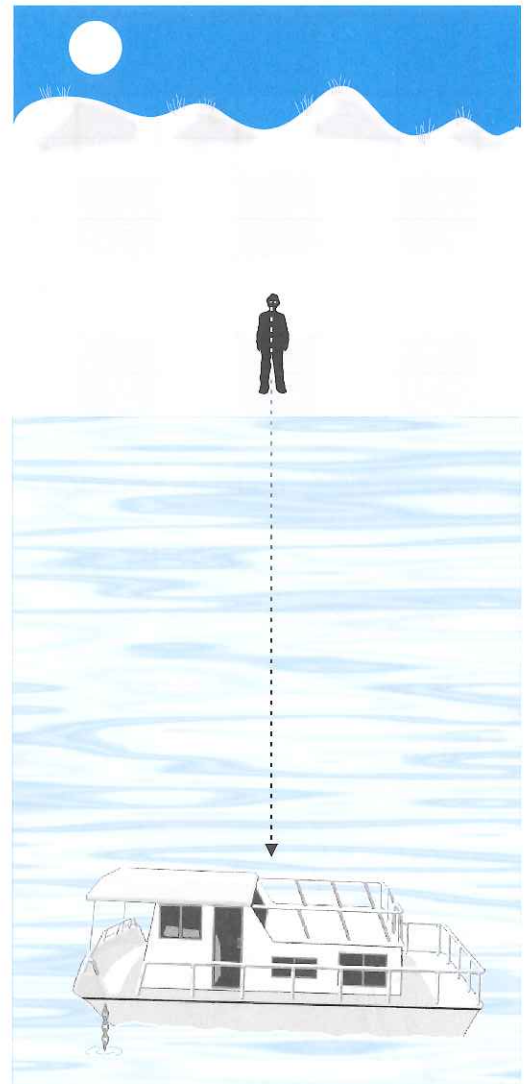
x =

De Y-as kun je beschouwen als een lange draad. Het positieve deel gaat richting de duinen. Op elke plek naast het positieve deel van de draad kun je aflezen hoe ver je van de kustlijn af bent. Het negatieve deel van de Y-as ligt in zee. Op 40 meter van T staat een paal op de kustlijn.

Kies zelf een plek waar het schip kan liggen (met de goede x-coördinaat) en zet in de tekening bij die plek de letter S. Jij weet dan hoe ver het schip van de kust af ligt, maar toeschouwer T weet dat nog niet.

- 3 Kun jij de toeschouwer helpen de afstand van het strand tot het schip te berekenen (zonder de y-coördinaat voor te zeggen)?

.....



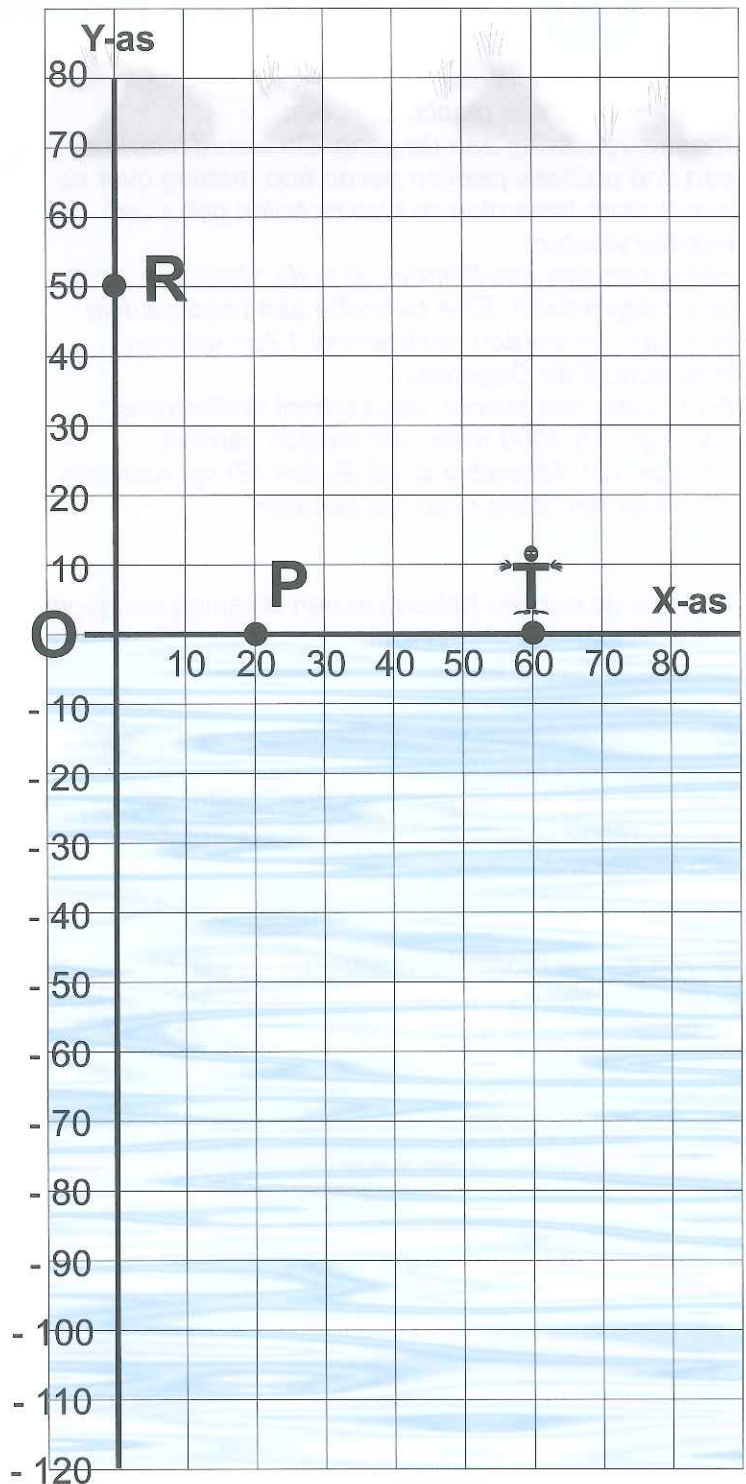
Met de volgende aanwijzingen ontdek je de 'oude' meetkundige manier.

Toeschouwer T loopt 40 meter langs de kustlijn in de richting van O. Daar staat een lange paal in het zand, en als die paal er nog niet staat, dan zet hij die alsnog op punt P.

T loopt nog 20 meter verder langs de kustlijn tot aan de oorsprong O.

Van daaruit loopt T loodrecht op de kustlijn richting duinen, dat is dus langs de Y-as. T loopt precies tot het punt R van waaruit hij het schip in het verlengde van de paal ziet liggen.

In ons geval ligt het punt R 50 meter van de oorsprong af.



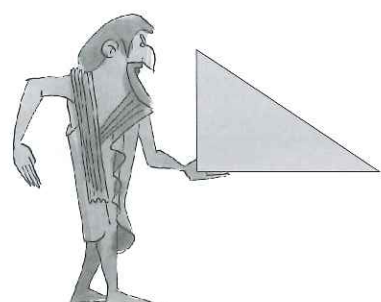
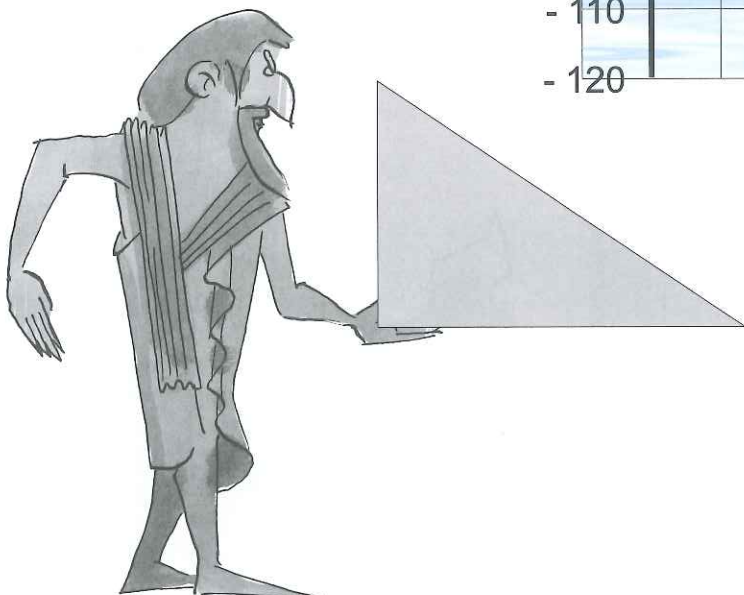
- 4 Wat zijn de coördinaten van punt R?

- 5 Geef in de tekening hiernaast de plaats S van het schip aan. Laat ook in de tekening zien hoe je die plek gevonden hebt. Hoeveel meter ligt het schip van de kust af?

- 6 Wat valt je op bij de driehoeken ROP en STP?

Al meer dan duizend jaar wordt in de wiskunde gebruik gemaakt van gelijke verhoudingen in gelijkvormige driehoeken.

Vandaar 'een oud kunstje'.



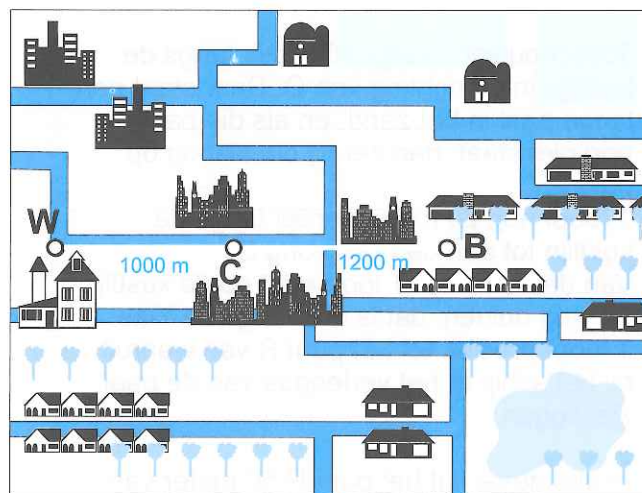
Les 14

Twée nieuwe scholen

Het gemeentehuis van Slimmeren ligt precies in het centrum van deze plaats. Er is een raadsvergadering aan de gang. De woordvoerders van drie politieke partijen geven hun mening over de plaats waar twee nieuwe basisscholen gebouwd moeten worden.

Het inwonertal van Slimmeren is de afgelopen jaren flink toegenomen. Er is behoefte aan twee nieuwe scholen; dat worden basisschool 't Zonnetje en basisschool de Dageraad.

Een bestaande school, basisschool Wolkenloos (W), ligt zo'n 1000 meter ten westen van het centrum (C). Nieuwbouwwijk Buiten (B) ligt ruim een kilometer ten oosten van het centrum.



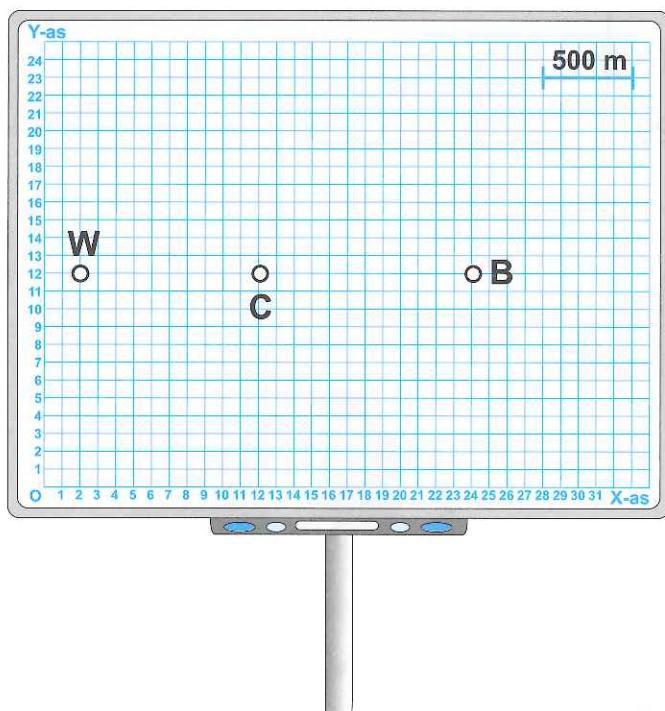
Alle drie de partijen hebben in een tekening aangegeven welke plaatsen volgens het partijstandpunt geschikt zijn voor de twee nieuwe scholen. De burgemeester vraagt aan de drie woordvoerders om hun voorstellen toe te lichten.

Mevrouw Verlopen van de Bewonerspartij zegt:

“Volgens een eerder genomen raadsbesluit moeten alle scholen even ver van het centrum van Slimmeren af liggen. Zo hoeven de centrumbewoners hun keuze voor een school niet te laten hangen van de afstand.”

- 1 Wat zijn de mogelijke plaatsen voor een school, als geldt dat die dezelfde afstand tot C moet hebben als W? Wat voor figuur zal mevrouw Verlopen getekend hebben? Waarmee denk je dat ze de tekening maakte?

Maak de tekening die volgens jou bij het standpunt van de Bewonerspartij hoort.

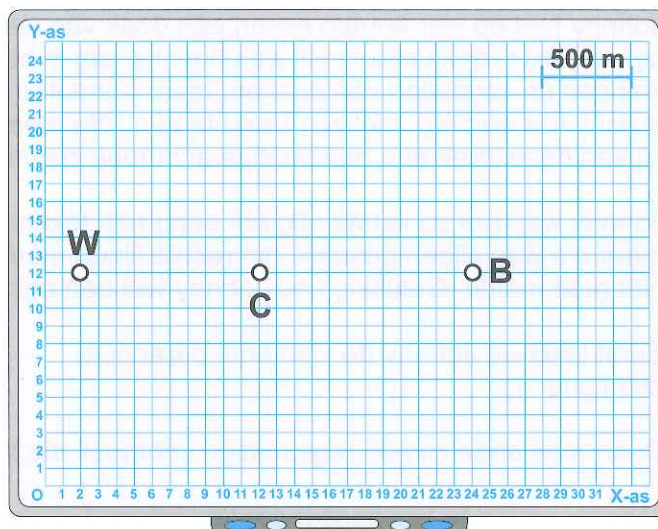


De heer Best van de Westpartij zegt:

"De nieuwe scholen mogen niet te veel concurrentie vormen voor basisschool Wolkenloos. Onze partij vindt het daarom onaanvaardbaar als er een nieuwe school gebouwd wordt binnen een straal van 1000 meter van deze school."

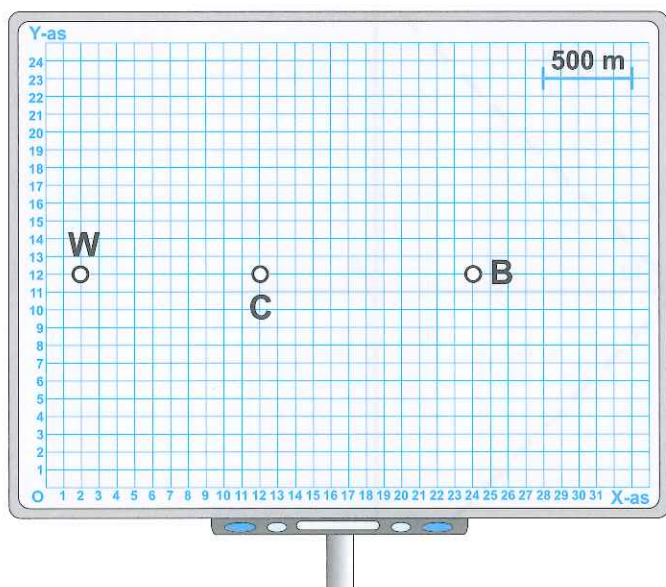
- 2 Hoe zal de heer Best de mogelijke plaatsen voor nieuwe scholen tekenen?
Of is het makkelijker voor hem om aan te geven waar de scholen *niet* mogen komen?

Maak de tekening die volgens jou bij het standpunt van de Westpartij hoort.



Mevrouw Inbreng van de Nieuwpartij verdedigt de belangen van de bewoners van de nieuwbouwwijk Buiten (B) en zegt:

"De school Wolkenloos is moeilijk te bereiken voor onze bewoners. Ik vind het niet meer dan redelijk dat de nieuwe scholen even dicht bij het centrum B van Buiten liggen als bij het centrum C van Slimmeren."



- 3 Waar zal mevrouw Inbreng de nieuwe scholen tekenen?
Maak de tekening die volgens jou bij het standpunt van de Nieuwpartij hoort.
- 4 Hoe zal de discussie verlopen? Welke partij krijgt haar zin?
- 5 Wat zullen de coördinaten zijn van school Z ('t Zonnetje) en school D (Dageraad)?

Les 15

De parachute

"Het doek is gevallen", jammerde Johnny, de stuntelige assistent. "Als jij niet snel beter werk levert, dan is ook voor jou het doek gevallen", donderde de bedrijfsleider van Octogoon, de parachutefabriek. "Hoe haal je het in je hoofd om met een vierkante parachute aan te komen? Ik wil toch op zijn minst een achthoekige. En die moet je nu maar eens snel gaan maken van dezelfde hoeveelheid doek die je daarnet hebt laten vallen!"



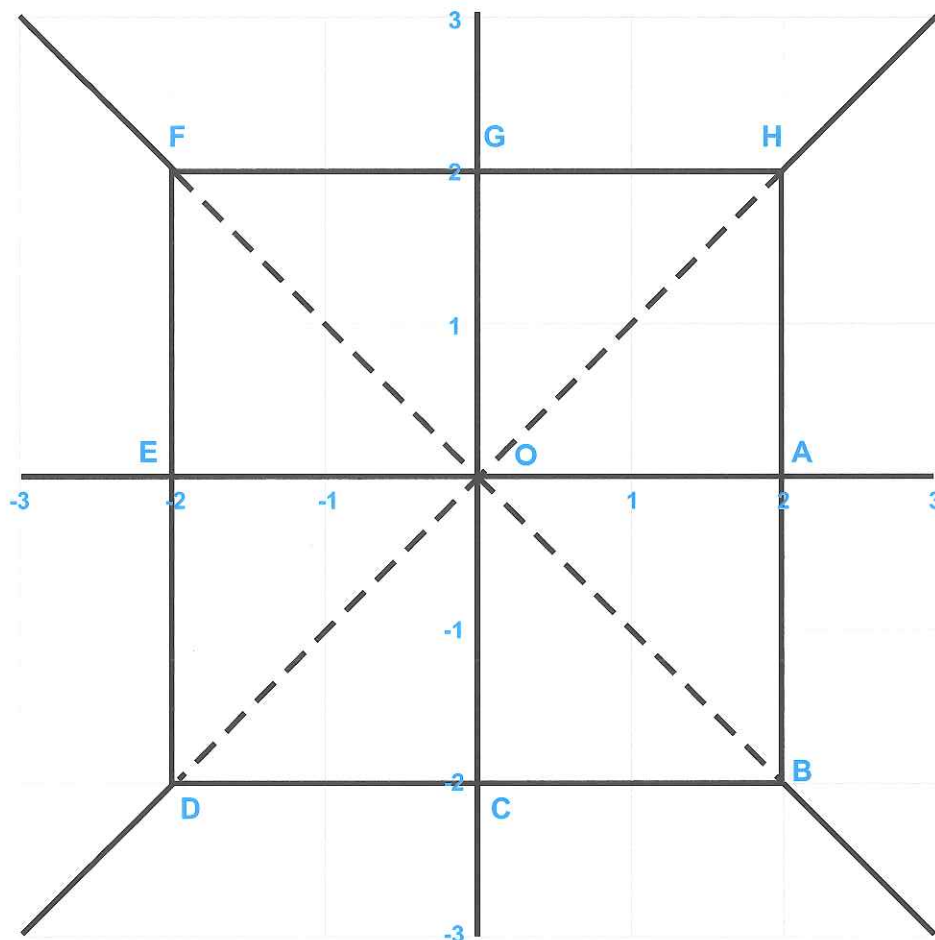
Johnny had op vier houten assen een doek van vier bij vier meter gespannen. Hij was heel handig in het knippen en verstellen van doeken, maar ruimtelijk inzicht was duidelijk niet zijn sterkste kant. Nu moest hij van deze doek een regelmatige achthoek zien te maken.

Johnny was wel zo verstandig om eerst een tekening te maken. Hij vond een liniaal bij zijn tekenspullen, maar die was alleen geschikt om rechte lijnen mee te trekken. Er stonden geen cijfers meer op, je kon er niet mee meten. Gelukkig had Johnny wel een passer.

Eerst tekende Johnny de vierkante parachute. (zie figuur 1)

Daarna tekende hij een regelmatige achthoek die binnen het bestaande doek paste.

Johnny gebruikte zijn passer om de afstand OA op de diagonale assen af te meten. Hij tekende vervolgens een rechte lijn van punt A naar het 'nieuwe punt' op OB, van daaruit een rechte lijn naar C en zo verder zowel via de nieuwe punten op de diagonale assen als via E en G.



figuur 1

- 1 Teken in figuur 1 de achthoek op de manier van Johnny.

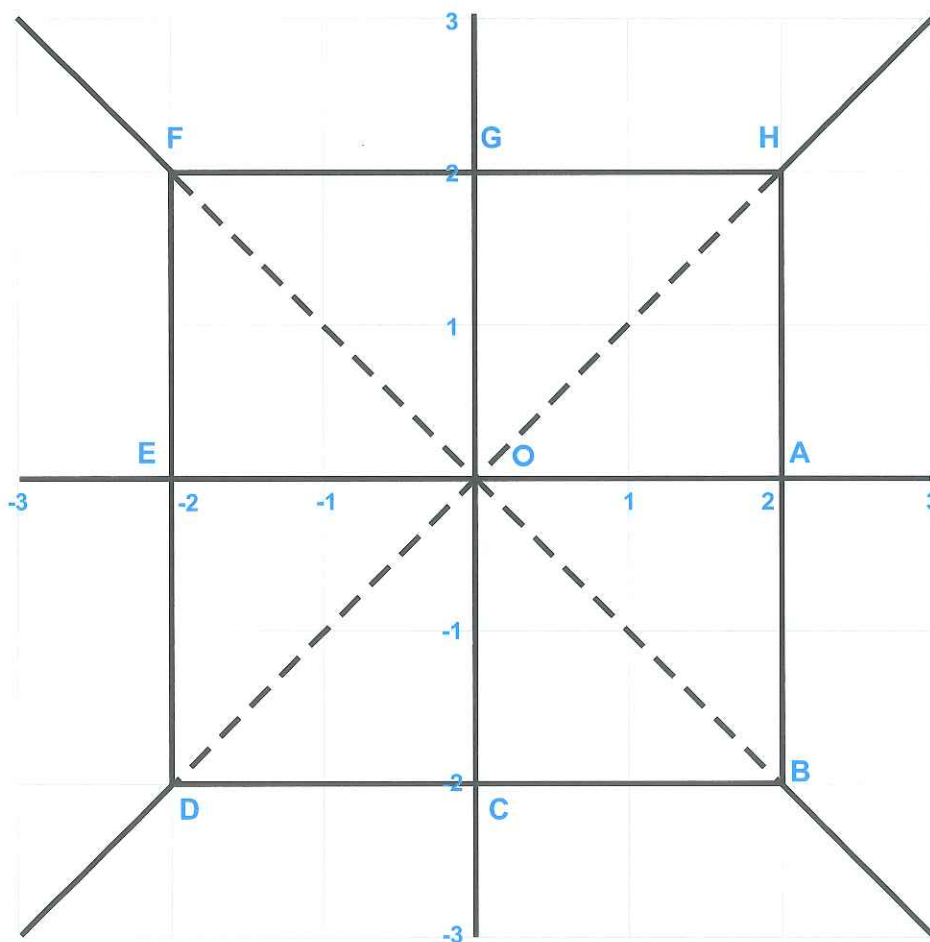
Vervolgens tekende Johnny een regelmatige achthoek door op de rechte assen de afstand OB af te meten en daarna de betreffende punten te verbinden.

- 2 Teken ook die achthoek in figuur 1.

Johnny zag wel in, dat de ene achthoek te klein was en de andere te groot. Maar hoe kon hij nu een achthoek maken met dezelfde oppervlakte als zijn vierkante parachute? Zijn baas eiste van hem dat hij opnieuw een achthoek tekende. De oppervlakte daarvan mocht niet meer dan 10% verschillen van de oppervlakte van de vierkante parachute.



- 3 Hoe kan Johnny dit probleem aanpakken? Voor deze moeilijke kwestie mag hij behalve zijn passer en potlood ook een geleende liniaal met cijfers gebruiken. Lukt het jou om in figuur 2 zo'n regelmatige achthoek te tekenen? Kun jij de goede verbindingspunten ook vinden met alleen een passer?



figuur 2

Beschrijf hieronder hoe jij dit probleem hebt aangepakt.

.....

.....

.....

.....

Les 16

De mieren van Pascal

Mieren zijn een nijver en zorgzaam volkje. Er zijn zelfs mieren die met hun lijf gaten in de weg vullen, zodat de andere mieren hun weg kunnen vervolgen. Zo zullen mieren die een nieuw gebied binnengaan het waarschijnlijk eerst goed verkennen.

Dat geldt in ieder geval voor de mieren van Pascal die voor het eerst in een assenstelsel komen. Voor de weggetjes die zij gaan lopen hebben zij hun plannen al helemaal klaar. Ze doorlopen alle mogelijkheden, zodat geen van de mieren ooit hoeft te verdwalen.

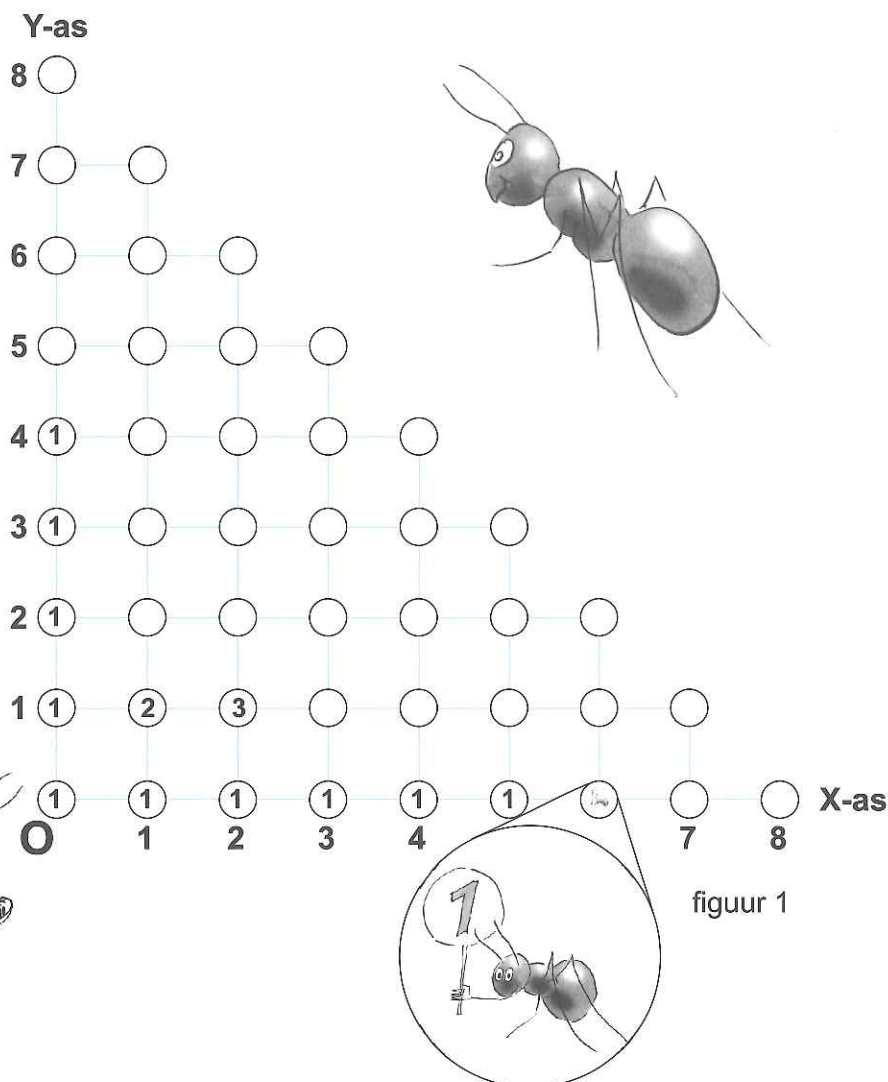
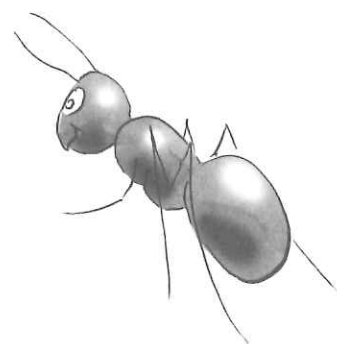
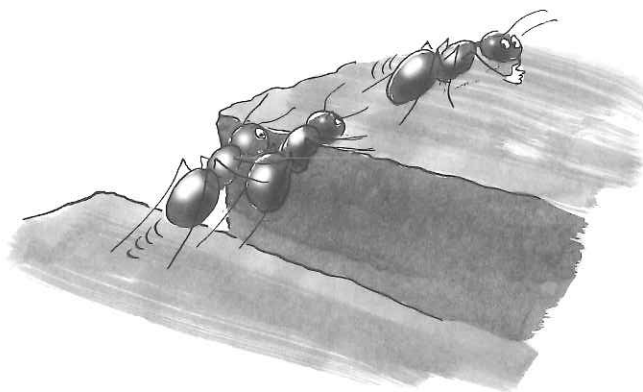
Met een grote groep vertrekken de mieren vanuit de oorsprong O. Hun strategie is als volgt:

looprichting

Alle mieren lopen van roosterpunt naar roosterpunt. Vanuit elk roosterpunt heeft een mier slechts twee mogelijkheden om verder te lopen. Of hij loopt horizontaal naar rechts in dezelfde richting als de X-as of hij loopt verticaal naar boven in dezelfde richting als de Y-as. Bij het verkennen mag een mier nooit terug.

achterblijvers

Op elk roosterpunt blijven precies zoveel mieren achter als er manieren zijn om dat roosterpunt te bereiken. Er blijven nooit twee mieren op een zelfde roosterpunt die precies dezelfde weg gelopen hebben. De mieren zorgen er bovendien ook voor dat ze geen enkele mogelijkheid overslaan. Er blijven daarom nooit te veel, maar ook nooit te weinig mieren achter.



- 1 Er zijn twee manieren om (1,1) te bereiken, dus er blijven twee mieren achter op (1,1). Daarom is er in figuur 1 in het assenstelsel een 2 ingevuld op roosterpunt (1,1).

Hoeveel mieren blijven er achter op roosterpunt (1,2)? achterblijvers

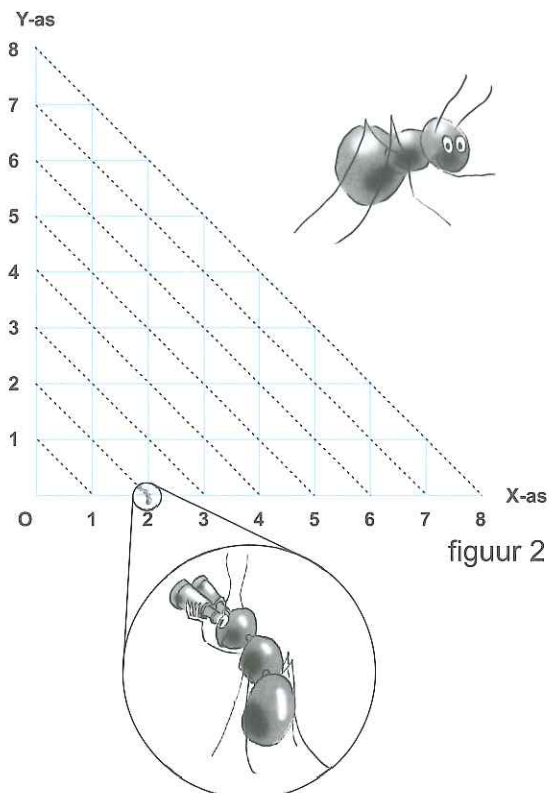
En hoeveel achterblijvers zijn er op (2,2), ofwel op hoeveel manieren kan een mier van O naar (2,2) lopen? achterblijvers

Vul ook op alle andere roosterpunten het aantal achterblijvers in.

2 Hoeveel achterblijvers zijn er op (47,1)? achterblijvers

Hoeveel achterblijvers zijn er op (15,2)? achterblijvers

Schrijf hiernaast hoe je antwoord gevonden hebt.



figuur 2

3 In figuur 2 kunnen de mieren lopen tot de lijn $x + y =$

De mieren op de X-as hebben mooi zicht op die diagonale lijnen in het assenstelsel. Zo ziet de mier op (2,0), dat er op de lijn $x + y = 2$ in totaal vier mieren zijn achtergebleven.

4 Hoeveel mieren zijn er achtergebleven op de lijn $x + y = 3$? $x + y = 3$: mieren

En hoeveel op de lijn $x + y = 4$? $x + y = 4$: mieren

De mier op (8,0) weet van alle mieren voor hem op de X-as hoeveel mieren er in hun diagonale lijn zijn achtergebleven. Zo kan hij snel uitrekenen hoeveel mieren er in totaal zullen achterblijven tot en met zijn eigen lijn $x + y = 8$.

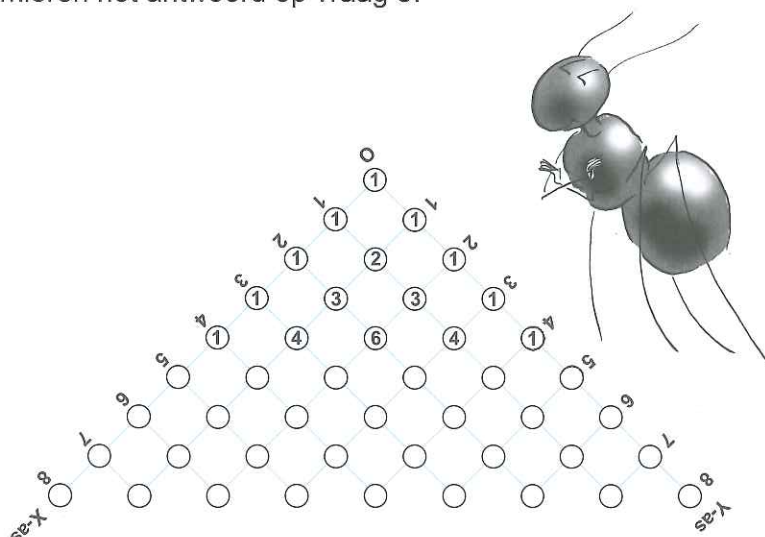
5 Hoeveel mieren zijn dat bij elkaar?

De mier op (0,8) doet het anders. Zij telt eerst het aantal mieren op haar eigen diagonale lijn $x + y = 8$. Dan weet zij zonder hulp van de andere mieren het antwoord op vraag 5.

6 Hoe kan zij dat zo snel weten?

Als je het assenstelsel kantelt, dan is de driehoek zichtbaar die bekend staat als *driehoek van Pascal*.

In de driehoek van Pascal zijn nog veel meer getalbijzonderheden te ontdekken. Blaise Pascal was een beroemde Franse wiskundige uit de 17^e eeuw.



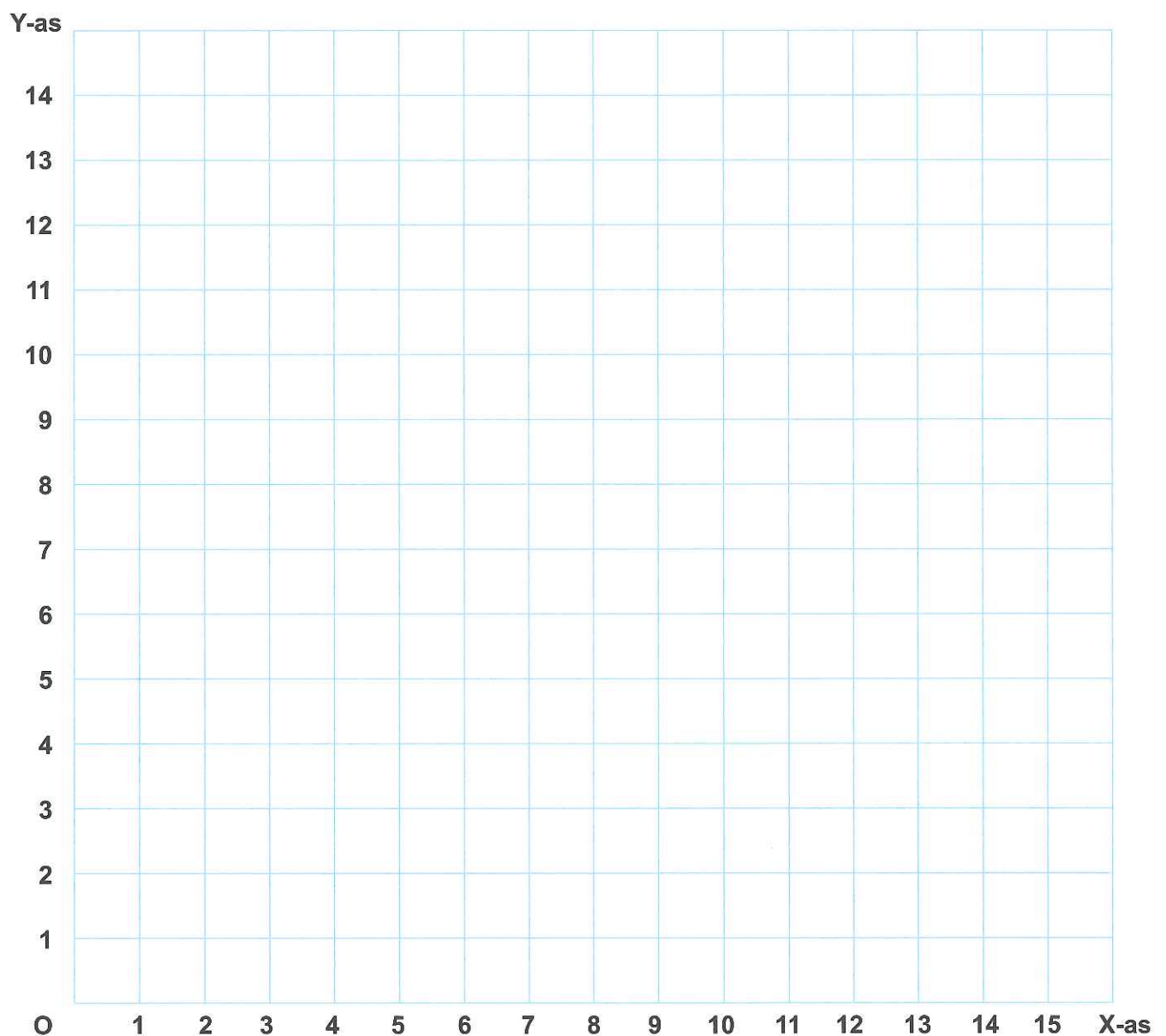
Toets 4

- 1** In deze toets ga je in het onderstaande assenstelsel een zelfverzonnen figuur maken. Bij die figuur verzin je aanwijzingen op het niveau van een mede-*topklasser*. Met behulp van alleen die aanwijzingen moet een *topklasser* precies dezelfde figuur kunnen maken in een leeg assenstelsel.

Schrijf op de volgende pagina je aanwijzingen. Verwerk daarin minstens twee onderdelen uit de lessen 13 tot en met 16. Denk daarbij aan gelijkvormige driehoeken (Les 13), gelijke afstanden en cirkels (Les 14), gebruik van de passer en regelmatige achthoek (Les 15) en mogelijke weggetjes en de driehoek van Pascal (Les 16).

Onderaan de bladzijde waarop je je aanwijzingen kunt schrijven, is nog ruimte voor een eventuele illustratie.

Laat als je klaar bent een andere *topklasser* jouw zelfbedachte opgave maken. Vergelijk daarna jullie figuren. Waren je aanwijzingen duidelijk? En waren ze bovendien niet te moeilijk en niet te makkelijk? Schrijf hieronder je ervaringen op.





Teken op ruitjespapier de figuur van _____ (naam)
 Gebruik ruitjes van 1 cm bij 1 cm (tenzij de *topklasser* die deze opgave maakte, aangeeft dat je een
 ander formaat moet gebruiken) en volg onderstaande aanwijzingen op.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Eindtoets A

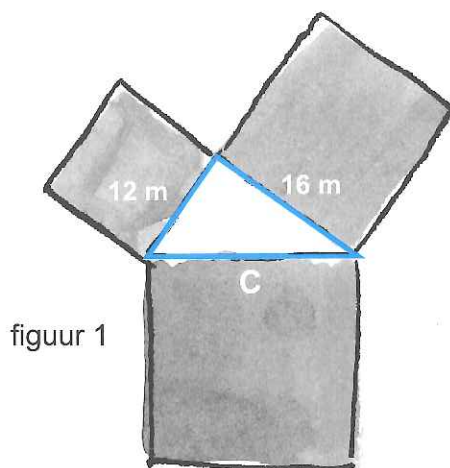
1	2	3	4	5	6	7	8

In Eindtoets A ga je op zoek naar een woord van acht letters.
Die acht letters vind je door de acht opgaven op te lossen.
Elke opgave levert een getal op dat omgezet moet worden in een letter.
Hoe je die getallen om kunt zetten zie je in het voorbeeld.

In Les 11 staan puzzels waarin de toetsen van een mobiele telefoon een rol spelen.
Ook in deze Eindtoets spelen mobiele toetsen een rol.
Stel het antwoord op een vraag is 168.
Dan ga je met 168 rekenen: $168 : 1 + 6 + 8 = 15 : 1 + 5 = 6$.
Het resultaat is 6. De 6 staat voor toets 6 op de mobiele telefoon.
Het gaat dus om een van de drie letters m, n of o.
Waarschijnlijk kom je er vanzelf achter welke de goede letter is.
Als dat niet lukt, kun je op het eind van deze toets verdere aanwijzingen vinden.

- 1 Hoe meer delers, hoe beter. De 1 telt niet mee. Elke andere deler telt net zo vaak mee als hij in het getal voorkomt. Hoeveel priemdelers heeft het getal $10 \times 18 \times 20$?
- 2 Hoeveel verschillende indelingen in rijen en kolommen zijn er om 64 even grote kaartjes over een rechthoek te verdelen? Let op: 1 rij en 64 kolommen telt mee, en 64 rijen en 1 kolom telt mee als een andere indeling.
- 3 Wat is het op een na grootste getal onder de 1000 dat je kunt schrijven als één macht van 2?

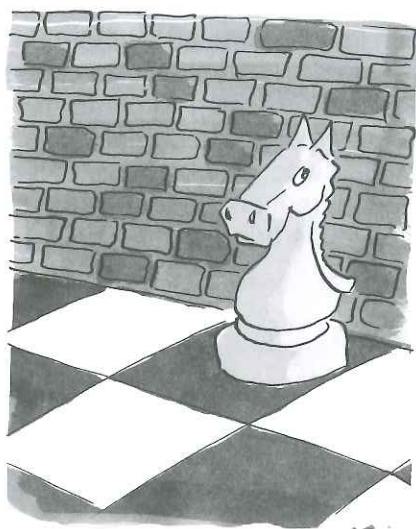
4



Hoe lang is zijde c van de rechthoekige driehoek in figuur 1?



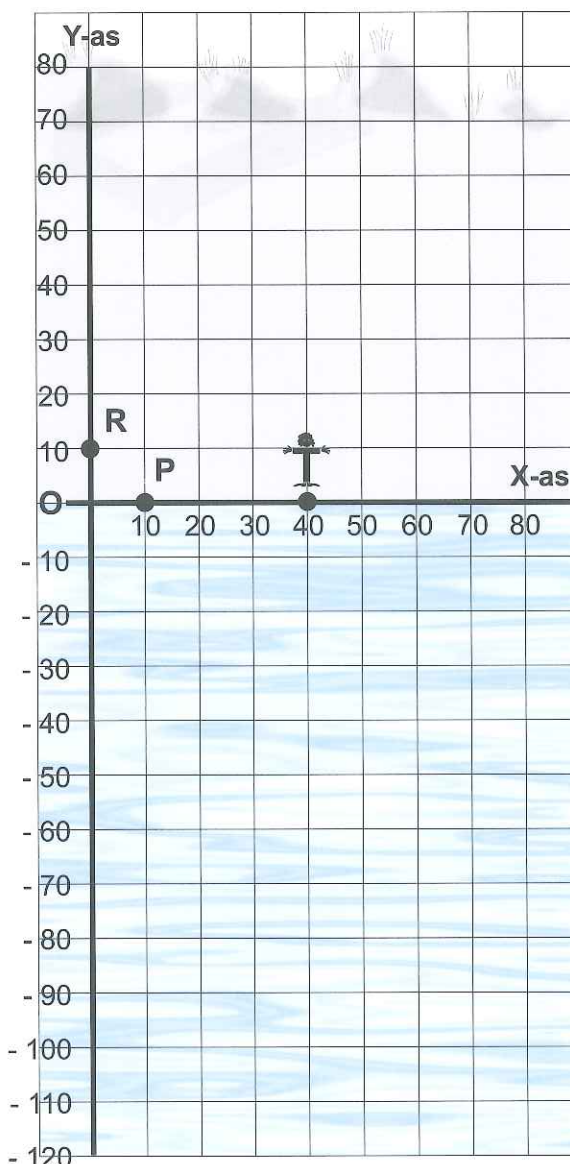
- 5 Met hoeveel lucifers leg je digitaal drie minuten voor tien 's avonds?
- 6 Behalve de rand van het schaakbord zijn er geen belemmeringen om te springen voor een zwart paard dat op vak H4 staat. Hoeveel verschillende sprongen kan het paard maken?



- 7 Toeschouwer T ziet schip S recht voor zich in zee. (figuur 2). Zij loopt naar punt R en ziet in één lijn paal P en schip S. Teken de plaats van schip S.

De y-coördinaat van S = -

- 8 In het assenstelsel waarin ik wil tekenen is 1 cm de afstand tussen roosterpunt O (0,0) en roosterpunt (1,0). Ik teken een cirkel door het punt (3,4) met O als middelpunt. Hoe groot moet ik de afstand nemen (in cm), tussen de passerpunt die ik in het papier prik en de potloodpunt van de passer?



figuur 2

Succes met het zoeken van de letters. Hieronder staan hint 1 en, als het echt nodig is, hint 2.

hint 1: Het gezochte woord is een 'wiskundig' muziekinstrument.

hint 2 Rechtsonder in de hokjes staat hoe vaak je bij de letter de toets moet indrukken.

1	2	3	4	5	6	7	8
1	3	3	1	2	1	2	3

Eindtoets B



Eindtoets B gaat op dezelfde manier als Eindtoets A.

Met één groot verschil.

Nu mag jij de opdrachten zelf verzinnen. Probeer bij elk tweetal lessen uit dit werkboek een interessante en uitdagende opdracht te verzinnen. Bedenk er vervolgens ook een *mobiele* oplossing bij of misschien zie jij andere mogelijkheden om tot een 'eindantwoord' te komen. Als jij zelf originele ideeën hebt om de toets vorm te geven, dan mag je die erin verwerken. Graag zelfs.

Nu ben je klaar. Wie durft jouw toets te maken?



Illustraties

Kre-add/Marcel Westervoorde, Alphen a/d Rijn

Vormgeving en lay-out

Kre-add/Marcel Westervoorde, Alphen a/d Rijn

ThiemeMeulenhoff ontwikkelt leermiddelen voor Primair Onderwijs, Voortgezet Onderwijs, Beroepsonderwijs en Volwasseneneducatie en Hoger Onderwijs

Meer informatie over ThiemeMeulenhoff en een overzicht van onze leermiddelen:

www.thiememeulenhoff.nl of via onze klantenservice (088) 800 20 17

ISBN 978 90 26 24209 0

Eerste druk, derde oplage, 2010

© ThiemeMeulenhoff, Amersfoort, 2008

Alle rechten voorbehouden. Niets uit deze uitgave mag worden verveelvoudigd, opgeslagen in een geautomatiseerd gegevensbestand, of openbaar gemaakt, in enige vorm of op enige wijze, hetzij elektronisch, mechanisch, door fotokopieën, opnamen, of enig andere manier, zonder voorafgaande schriftelijke toestemming van de uitgever.

Voor zover het maken van kopieën uit deze uitgave is toegestaan op grond van artikel 16 Auteurswet j° het Besluit van 23 augustus 1985, Stbl., dient men de daarvoor wettelijk verschuldigde vergoedingen te voldoen aan Stichting Publicatie- en Reproductierechten Organisatie (PRO), Postbus 3060, 2130 KB Hoofddorp (www.cedar.nl/pro). Voor het overnemen van gedeelte(n) uit deze uitgave in bloemlezingen, readers en andere compilatiewerken (artikel 16 Auteurswet) dient men zich tot de uitgever te wenden. Voor meer informatie over het gebruik van muziek, film en het maken van kopieën in het onderwijs zie www.auteursrechtenonderwijs.nl.

De uitgever heeft ernaar gestreefd de auteursrechten te regelen volgens de wettelijke bepalingen. Degenen die desondanks menen zekere rechten te kunnen doen gelden, kunnen zich alsnog tot de uitgever wenden.

Deze uitgave is voorzien van het FSC-keurmerk. Dit betekent dat de bosbouw voor het gebruikte papier op een verantwoorde wijze heeft plaatsgevonden.

