

Pascal Goderie

TOPklassers

Antwoordenboek

wiskunde

deel 2

ThiemeMeulenhoff

TOPklassers

wiskunde

deel 2

Antwoordenboek

Auteur

Pascal Goderie



Illustraties

Kre-add/Marcel Westervoorde, Alphen a/d Rijn

Vormgeving en lay-out

Kre-add/Marcel Westervoorde, Alphen a/d Rijn

ThiemeMeulenhoff ontwikkelt leermiddelen voor Primair Onderwijs, Voortgezet Onderwijs, Beroepsonderwijs en Volwasseneneducatie en Hoger Onderwijs

Meer informatie over ThiemeMeulenhoff en een overzicht van onze leermiddelen:
www.thiememeulenhoff.nl of via onze klantenservice (088) 800 20 17

ISBN 978 90 262 4210 6

Eerste druk, vierde oplage, 2011

© ThiemeMeulenhoff, Amersfoort, 2008

Alle rechten voorbehouden. Niets uit deze uitgave mag worden verveelvoudigd, opgeslagen in een geautomatiseerd gegevensbestand, of openbaar gemaakt, in enige vorm of op enige wijze, hetzij elektronisch, mechanisch, door fotokopieën, opnamen, of enig andere manier, zonder voorafgaande schriftelijke toestemming van de uitgever.

Voor zover het maken van kopieën uit deze uitgave is toegestaan op grond van artikel 16 Auteurswet j° het Besluit van 23 augustus 1985, Stbl., dient men de daarvoor wettelijk verschuldigde vergoedingen te voldoen aan Stichting Publicatie- en Reproductierechten Organisatie (PRO), Postbus 3060, 2130 KB Hoofddorp (www.stichting-pro.nl). Voor het overnemen van gedeelte(n) uit deze uitgave in bloemlezingen, readers en andere compilatiewerken (artikel 16 Auteurswet) dient men zich tot de uitgever te wenden. Voor meer informatie over het gebruik van muziek, film en het maken van kopieën in het onderwijs zie www.auteursrechtenonderwijs.nl.

De uitgever heeft ernaar gestreefd de auteursrechten te regelen volgens de wettelijke bepalingen. Degenen die desondanks menen zekere rechten te kunnen doen gelden, kunnen zich alsnog tot de uitgever wenden.

Inleiding voor de leerkracht

Dit is het antwoordenboek van het tweede deel van *Topklassers Wiskunde*.

Topklassers Wiskunde zijn vooral bestemd voor kinderen van groep 7 en 8 die behoefte hebben aan een extra uitdaging.

Het werkboek voor de leerling staat vol met wiskundige vraagstukken. Voor kinderen die zo'n uitdaging aankunnen en die niet snel opgeven.

Voor die kinderen bevatten *Topklassers Wiskunde* tal van interessante problemen, waarvan sommige eigenlijk pas op de middelbare school aan bod komen.

De kinderen maken in deel 2 onder andere kennis met de stelling van Pythagoras en met cirkel eigenschappen.

Voor kinderen die wat minder zelfstandig met problemen aan de gang kunnen, is dit boekje niet zo geschikt. Het is niet de bedoeling, dat u als leerkracht veel steun moet gaan bieden. Wel zijn de opgaven bijzonder geschikt om in tweetallen of in kleine groepjes aan te werken. Misschien kunnen dergelijke groepjes hun nieuw opgedane kennis eens aan de groep presenteren?

Ook een klassikale aanpak van een van de problemen uit het werkboek kan een incidentele verrijking zijn van uw reguliere lessen rekenen-wiskunde.

Leerlingen die een les afhebben, kunnen in dit antwoordenboek zelf de antwoorden controleren.

Wie weet, komen uw leerlingen verrassend uit de hoek met mooie wiskundige oplossingen.

Veel plezier met uw *wiskunde topklassers*!

Pascal Goderie

- 1 Lotnummer 6 levert $1 + 2 + 3 + 6 = 12$ euro op. Dus € 2,- winst voor de eigenaar van het lot.
Lotnummer 7 levert $1 + 7 = 8$ euro op. Dus € 2,- verlies.
- 2 De lotnummers 1, 11, 13, 17 en 19 zijn van de genoemde mogelijkheden alleen door 1 deelbaar en leveren dus € 9,- verlies op.
- 3 De lotnummers 6, 8, 9, 10, 12, 16, 18 en 20 leveren meer dan € 10,- op en zijn dus winstgevend.
20 is deelbaar door 1, 2, 4, 5 en 10 en zorgt met een prijs van € 22,- voor de grootste winst, namelijk € 12,-.
- 4 De grootst mogelijke winst geeft het nummer 72. 72 is deelbaar door 1, 2, 3, 4, 6, 8 en 9 en levert € 23,- winst op.
- 5 Het hoogste bedrag kan iemand winnen bij een getal dat deelbaar is door 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 en door 10. De winst is dan € 45,- (55 euro – 10 euro).
Er moeten dan $72 \times 5 \times 7 = 2520$ loten verkocht zijn, immers 2520 is het eerste getal dat deelbaar is door 1 tot en met 10. Je kunt dit getal ook vinden door uit te gaan van $10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$, en dan alle delers weg te halen die meer dan één keer voorkomen.
- 6 Bij de loten 1 tot en met 10 blijft er over voor het goede doel:
 10×10 euro per lot – prijzengeld = 100 euro – 87 euro = 13 euro.
- 7 Bij de loten 11 tot en met 20 blijft er € 3,- over voor het goede doel. Dus de opbrengst voor het goede doel van de eerste 20 loten is in totaal € 16,-.
- 8 De opbrengst van de loterij zal zo goed als niets zijn.

In plaats van per nummer de prijs uit te rekenen, kun je ook uitrekenen hoeveel prijzengeld er betaald moet worden aan nummers die door 2 deelbaar zijn. Hoeveel prijzengeld aan nummers door 3 deelbaar en zo verder.

We gaan even uit van 200 loten.

Alle getallen zijn deelbaar door 1, dus voor elk lot moet al € 1,- aan prijzengeld betaald worden: bij elkaar € 200,-.

100 getallen zijn deelbaar door 2, dus aan prijzengeld daarvoor wordt betaald: $100 \times € 2,- = € 200,-$.

Een op de drie getallen is deelbaar door 3, dus hiervoor moet aan prijzengeld betaald worden ongeveer $200 : 3 \times € 3,- = € 200,-$. (niet precies omdat 200 niet deelbaar is door 3, de 66 drievouden onder de 200 leveren € 198,- op)

Zo doorgaand bemerk je dat voor de deelbaarheid door elk getal tot en met 10 bij benadering € 200,- aan prijzengeld betaald moet worden.

Bij elkaar is dat $10 \times € 200,-$ en dat is precies het bedrag dat betaald wordt voor de loten. Er blijft dan dus niets over voor het goede doel.

9 Ter beoordeling van de leerkracht.

Om te bereiken dat de loterij iets oplevert, zal een lot in ieder geval duurder dan 10 euro moeten zijn.

Les 2 Priemloten

- 1** De verkoop van 50 loten levert op: $50 \times € 10,- = € 500,-$.
Aan prijzen wordt uitgereikt: $2 + 3 + 5 + 7 + 11 + 13 + 17 + 19 + 23 + 29 + 31 + 37 + 41 + 43 + 47 = € 328,-$.
Het verschil gaat naar het goede doel: € 172,-.

2 Priemgetallen.

3 1 = 1	12 = 2 x 2 x 3
2 = 2	13 = 13
3 = 3	14 = 2 x 7
4 = 2 x 2	15 = 3 x 5
5 = 5	16 = 2 x 2 x 2 x 2 (4)
6 = 2 x 3	17 = 17
7 = 7	18 = 2 x 3 x 3
8 = 2 x 2 x 2	19 = 19
9 = 3 x 3	20 = 2 x 2 x 5
10 = 2 x 5	21 = 3 x 7
11 = 11	22 = 2 x 11

23 = 23	62 = 2 x 31
24 = 2 x 2 x 2 x 3 (4)	63 = 3 x 3 x 7
25 = 5 x 5	64 = 2 x 2 x 2 x 2 x 2 x 2 (6)
26 = 2 x 13	65 = 5 x 13
27 = 3 x 3 x 3	66 = 2 x 3 x 11
28 = 2 x 2 x 7	67 = 67
29 = 29	68 = 2 x 2 x 17
30 = 2 x 3 x 5	69 = 3 x 23
31 = 31	70 = 2 x 5 x 7
32 = 2 x 2 x 2 x 2 x 2 (5)	71 = 71
33 = 3 x 11	72 = 2 x 2 x 2 x 3 x 3 (5)
34 = 2 x 17	73 = 73
35 = 5 x 7	74 = 2 x 37
36 = 2 x 2 x 3 x 3 (4)	75 = 3 x 5 x 5
37 = 37	76 = 2 x 2 x 19
38 = 2 x 19	77 = 7 x 11
39 = 3 x 13	78 = 2 x 3 x 13
40 = 2 x 2 x 2 x 5 (4)	79 = 79
41 = 41	80 = 2 x 2 x 2 x 2 x 5 (5)
42 = 2 x 3 x 7	81 = 3 x 3 x 3 x 3 (4)
43 = 43	82 = 2 x 41
44 = 2 x 2 x 11	83 = 83
45 = 3 x 3 x 5	84 = 2 x 2 x 3 x 7 (4)
46 = 2 x 23	85 = 5 x 17
47 = 47	86 = 2 x 43
48 = 2 x 2 x 2 x 2 x 3 (5)	87 = 3 x 29
49 = 7 x 7	88 = 2 x 2 x 2 x 11 (4)
50 = 2 x 5 x 5	89 = 89
51 = 3 x 17	90 = 2 x 3 x 3 x 5 (4)
52 = 2 x 2 x 13	91 = 7 x 13
53 = 53	92 = 2 x 2 x 23
54 = 2 x 3 x 3 x 3 (4)	93 = 3 x 31
55 = 5 x 11	94 = 2 x 47
56 = 2 x 2 x 2 x 7 (4)	95 = 5 x 19
57 = 3 x 19	96 = 2 x 2 x 2 x 2 x 3 (6)
58 = 2 x 29	97 = 97
59 = 59	98 = 2 x 7 x 7
60 = 2 x 2 x 3 x 5 (4)	99 = 3 x 3 x 11
61 = 61	100 = 2 x 2 x 5 x 5 (4)

De eerste 50 loten brengen $50 \times € 10,- = € 500,-$ op. Bij 6 van die 50 loten moet een prijs betaald worden: $4 \times € 10,- + 2 \times € 25,- = € 90,-$.
Er gaat € 410,- naar het goede doel.

- 4 100 verkochte loten brengen € 1000,- op.
Bij de eerste 50 loten moet € 90,- aan prijzengeld betaald worden. (zie opgave 3)
Bij de tweede 50 loten is het prijzengeld:
 $8 \times € 10,- + 2 \times € 25,- + 2 \times € 100,- = € 330,-$.
Het totale prijzengeld voor 100 verkochte loten is € 90,- + € 330,- = € 420,-. Er gaat € 580,- naar het goede doel.

- 5 Ook hier brengen 100 verkochte loten € 1000,- op.
Het prijzengeld van de eerste 50 loten is € 328,- (zie opgave 1).
Het prijzengeld van de tweede 50 loten is $53 + 59 + 61 + 67 + 71 + 73 + 79 + 83 + 89 + 97 = € 732,-$.
Het totale prijzengeld voor 100 verkochte loten is € 328,- + € 732,- = € 1060,-. Dat betekent € 60,- verlies. Er gaat niets naar het goede doel.

- 6 Gezien vanuit de opbrengst voor het goede doel verdient voorstel 'JoMei' de voorkeur. Zowel bij 50 verkochte loten als bij 100 is voorstel 'JoMei' gunstiger.

- 7 In beide voorstellen zal er verlies geleden worden.
In voorstel 'GuDie' is dat al het geval na 100 verkochte loten. De priemgetallen groter dan 100, zoals 463 en 491, zorgen voor nog grotere verliezen. Maar ook in voorstel 'JoMei' gaat het mis met de grote getallen. Je vindt boven 100 steeds meer getallen die in 6 of meer factoren ontbonden kunnen worden en waarbij dus 100 euro aan prijzengeld betaald moet worden.

Les

3

Knap geknipt deel 1

- 1 $15 \times 7 + 8 \times 14 = 105 + 112 = 217$
- 2 Vergelijk je antwoord met de antwoorden op de volgende vragen.
- 3 $7 + 8 \times 14 = 119$

- 4 $14 + 15 \times 7 = 119$
- 5 De beide manieren (in het ene geval eerst verticaal en in het andere geval eerst horizontaal) hebben een gelijk aantal kniplijnen.
- 6 6.1 $10 \times 11 + 12 \times 9 = 218$ 6.4 $9 + 10 \times 11 = 119$
 6.2 Zie antwoord opgave 2. 6.5 Bij beide manieren
 6.3 $11 + 12 \times 9 = 119$ evenveel.
- 7 De aantallen zijn gelijk.

Les 4 Knap geknipt deel 2

- 1
- | | | | |
|-----------|-----------|-----------|-----------|
| 1 bij 120 | 120 bij 1 | 2 bij 60 | 60 bij 2 |
| 3 bij 40 | 40 bij 3 | 4 bij 30 | 30 bij 4 |
| 5 bij 24 | 24 bij 5 | 6 bij 20 | 20 bij 6 |
| 8 bij 15 | 15 bij 8 | 10 bij 12 | 12 bij 10 |
- 2 In alle gevallen is het antwoord 119.
- 3 $2p$ betekent $2 \times p$, pq betekent $p \times q$

Kniplijnen kolommen → rijen ↓	1	2	3	4	5	6	q
1	0	1	2	3	4	5	$q-1$
2	1	3	5	7	9	11	$2q-1$
3	2	5	8	11	14	17	$3q-1$
4	3	7	11	15	19	23	$4q-1$
5	4	9	14	19	24	29	$5q-1$
6	5	11	17	23	29	35	$6q-1$
p	$p-1$	$2p-1$	$3p-1$	$4p-1$	$5p-1$	$6p-1$	$pq-1$

- 4 4.a $p \times q$ kaartjes 4.b $p \times q - 1$ (ook $q \times p - 1$ is goed)
- 5 $q \times p - 1$ (is hetzelfde als $p \times q - 1$)

6 Het maakt niet uit of je eerst horizontaal knipt of eerst verticaal.
Het aantal kniplijnen is gelijk.

7 Alle indelingen in p rijen en q kolommen bij opgave 1 geven
 $p \times q = 120$ (het aantal kaartjes).
In alle gevallen is het aantal kniplijnen $p \times q - 1 = 119$.

Toets 1

1 Ter beoordeling van de leerkracht.

2

2a $p \times q + 3$. Zonder buitenranden was het aantal $p \times q - 1$, door de buitenranden zijn er 4 kniplijnen extra.

2b Bij 7 rijen en 11 kolommen zijn er $7 \times 11 + 3 = 80$ kniplijnen. Bij 11 rijen en 7 kolommen is dat natuurlijk ook zo.

2c Het is niet mogelijk als het aantal kniplijnen 'een priemgetal + 3' is. Bijvoorbeeld bij 10, bij 26 en bij 34 kniplijnen.

3 Er zijn $a \times b$ kaartjes. Zet bij ieder kaartje 2 streepjes, 1 streepje door de linkerrand en 1 streepje door de bovenrand. Dat zijn precies $2 \times a \times b$ streepjes. Helemaal rechts zijn er a randen zonder streepje en helemaal onderaan zijn er b randen zonder streepje. Dat betekent dat er in totaal $2 \times a \times b + a + b$ randen zijn.

Les

5

De machtige twee

1 $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 64$. Je kunt dit schrijven als 2^6 .
Je spreekt het uit als twee tot de macht zes of twee tot de zesde.

2

1	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024
2^0	2^1	2^2	2^3	2^4	2^5	2^6	2^7	2^8	2^9	2^{10}

3 $2^{12} = 1024 \times 2 \times 2 = 4096$.

4 $12 = 8 + 4 = 2^3 + 2^2$

$37 = 32 + 4 + 1 = 2^5 + 2^2 + 2^0$

5

$7 =$	$4 + 2 + 1$	$= 2^2 + 2^1 + 2^0$
$24 =$	$16 + 8$	$= 2^4 + 2^3$
$90 =$	$64 + 16 + 8 + 2$	$= 2^6 + 2^4 + 2^3 + 2^1$
$17 =$	$16 + 1$	$= 2^4 + 2^0$
$59 =$	$32 + 16 + 8 + 2 + 1$	$= 2^5 + 2^4 + 2^3 + 2^1 + 2^0$
$132 =$	$128 + 4$	$= 2^7 + 2^2$

- 6 Als geen enkele macht van 2 meer dan één keer gebruikt mag worden, dan is er voor elk getal precies één manier om dat getal te schrijven als combinatie van machten van 2.

Les 6 De goocheltruc

- 1 De machten $2^0, 2^1, 2^2, 2^3, 2^4, 2^5, 2^6, 2^7, 2^8$ en 2^9 .

2

	2^0	2^1	2^2	2^3	2^4	2^5	2^6	2^7	2^8	2^9
	1	2	4	8	16	32	64	128	256	512
1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
3	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
4	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
5	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0
6	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0
7	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0
										
997	1	0	1	0	0	1	1	1	1	1
998	0	1	1	0	0	1	1	1	1	1
999	1	1	1	0	0	1	1	1	1	1
1000	0	0	0	1	0	1	1	1	1	1

Nee, dat lukt niet. $1 + 2 + 4 + 8 = 15$ en geen van de getallen mag meer dan één keer gebruikt worden.

Je moet voor 16 dus een 'nieuw' lampje inschakelen.

- 3 Voor de truc met getallen onder de 64 heb je nodig: 2^0 , 2^1 , 2^2 , 2^3 , 2^4 en 2^5 . Dat betekent zes kaartjes. Met deze zes kaartjes kun je de truc doen.

1	3	5	7	9	11	13	15
17	19	21	23	25	27	29	31
33	35	37	39	41	43	45	47
49	51	53	55	57	59	61	63

8	9	10	11	12	13	14	15
24	25	26	27	28	29	30	31
40	41	42	43	44	45	46	47
56	57	58	59	60	61	62	63

2	3	6	7	10	11	14	15
18	19	22	23	26	27	30	31
34	35	38	39	42	43	46	47
50	51	54	55	58	59	62	63

16	17	18	19	20	21	22	23
24	25	26	27	28	29	30	31
48	49	50	51	52	53	54	55
56	57	58	59	60	61	62	63

4	5	6	7	12	13	14	15
20	21	22	23	28	29	30	31
36	37	38	39	44	45	46	47
52	53	54	55	60	61	62	63

32	33	34	35	36	37	38	39
40	41	42	43	44	45	46	47
48	49	50	51	52	53	54	55
56	57	58	59	60	61	62	63

- 4 Je legt de kaartjes die aangewezen zijn apart.
Tel nu de getallen op die linksboven staan.
Het getal dat je zo vindt, is het gezochte getal.
- 5 Je moet dan zeven kaartjes maken. Nog een extra kaartje met 64 linksboven. Op ieder kaartje staan 64 getallen.

Les

7

Slingers

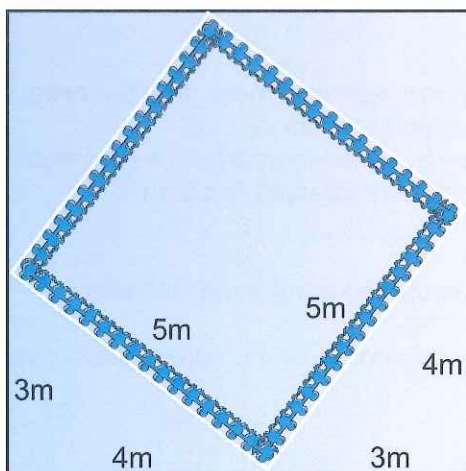
- 1 Ter beoordeling van de leerkracht. Vergelijk het antwoord bij opgave 7 van Les 8.
- 2 De oppervlakte van één driehoek is $\frac{1}{2} \times 4 \times 8 = 16 \text{ m}^2$.
De oppervlakte van de vier driehoeken samen is 64 m^2 .
- 3 De oppervlakte van de hele kamer is $12 \times 12 = 144 \text{ m}^2$.
- 4 De oppervlakte van de vierhoek tussen de slingers is de oppervlakte van de hele kamer min de totale oppervlakte van de vier driehoeken: $144 - 64 = 80 \text{ m}^2$.
- 5 De vierhoek tussen de slingers is een vierkant.

- 6 De afstand tussen twee opeenvolgende ophangpunten ligt tussen 8 en 9 m. Als het 9 m was, zou de oppervlakte van het vierkant 81 m^2 zijn. Dat is iets meer dan de werkelijke oppervlakte.
De slingers zullen zelfs langer dan 9 m zijn. (ze buigen iets door)

Les 8 De stelling van Pythagoras

- 1 Hierbij gaat het om je mening. Het is vooral belangrijk welke argumenten je gebruikt.
De oplossing van Wieke en Koen is een goede. Er is echter een oplossing mogelijk met een nog grotere oppervlakte tussen de slingers.
- 2 De vierhoek tussen de slingers is een vierkant en heeft een oppervlakte van $24,5 \text{ m}^2$ (de helft van de oppervlakte van de hele kamer).
- 3 De afstand tussen twee ophangpunten is minder dan vijf meter. Bij precies vijf meter zou de oppervlakte van het tussenliggende vierkant $5 \times 5 = 25 \text{ m}^2$ moeten zijn. En bij meer dan vijf meter zou die oppervlakte nog groter zijn.
- 4 In dat geval is de oppervlakte wel $5 \times 5 = 25 \text{ m}^2$.
- 5 Er blijft $49 - 25 = 24 \text{ m}^2$ over voor de vier driehoeken, die alle even groot zijn. Elke driehoek heeft dus een oppervlakte van $24 : 4 = 6 \text{ m}^2$.
- 6 De lengte l en de breedte b van de driehoek zijn samen even lang als de totale lengte van de kamer.
Dus $l + b = 7 \text{ m}$.
De oppervlakte van de rechthoekige driehoek is $\frac{1}{2} \times l \times b = 6 \text{ m}^2$, dus lengte $\times$ breedte moet 12 zijn.
Dat kan als de driehoeken een lengte van 4 m en een breedte van 3 m hebben.

7



8

Die oppervlakte is 80 m^2 . Zie de antwoorden bij de opgaven 2, 3 en 4 van Les 7.

9

$c \times c = 80 \text{ m}^2$, dus $c = \sqrt{80} \text{ m}$. $\sqrt{80} \times \sqrt{80} = 80$ en $9 \times 9 = 81$.
Dus $\sqrt{80}$, de lengte van de schuine zijde van de driehoek, is minder dan 9 m. In het bewijs van $4^2 + 8^2 = c^2$ kun je gebruikmaken van de volgende berekening:
 $12 \times 12 \text{ m}^2 = (4 + 8) \times (4 \times 8) \text{ m}^2 = 4 \times 4 + 8 \times 8 + 2 \times (4 \times 8) \text{ m}^2!$

Toets 2

1

1a Het getal 25. De getallen linksboven op de kaartjes bij elkaar geven $1 + 6 + 18 = 25$.

1b De kaartjes met de 2, 4 en 16 linksboven. $2 + 4 + 16 = 22$.

1c Mirjam heeft 5 kaartjes gemaakt. De kaartjes hebben achtereenvolgens de getallen 1, 2, 4, 8 en 16 linksboven.

1d Het getal 12.
 $19 = 1 + 2 + 16$ en staat dus op de kaartjes met linksboven 1, 2 en 16. De kaartjes met linksboven 4 en 8 zijn over.
 $12 = 4 + 8$ en staat alleen op die twee kaartjes.

2

2a Mirjam moet nieuwe kaartjes maken met meer getallen erop. Op elk kaartje staan nu 32 getallen in plaats van 16.

Mirjam kan wel de getallen van de oude kaartjes overnemen, want die komen ook op de nieuwe kaartjes te staan.

2b Het getal 44.

$19 = 1 + 2 + 16$ en staat dus op de kaartjes met linksboven 1, 2 en 16.

$44 = 4 + 8 + 32$ en staat op de andere drie kaartjes (linksboven 4, 8 en 32).

2c 1 en 62 is zo'n getallenduo.

1 staat op het kaartje met linksboven de 1, 62 staat op de andere vijf kaartjes. ($2 + 4 + 8 + 16 + 32 = 62$)

Elke twee getallen die bij elkaar opgeteld 63 zijn, vormen zo'n getallenduo. Bijvoorbeeld 2 en 61, en ook 3 en 60.

Als je beide getallen van zo'n duo als som van machten van 2 schrijft, dan kunnen ze alleen opgeteld 63 zijn als precies 1, 2, 4, 8, 16 en 32 één keer voorkomen. Op ieder kaartje moet dus precies één van de twee duogetallen staan.

3

3a De oppervlakte van de zaal is $17 \times 17 = 289 \text{ m}^2$.

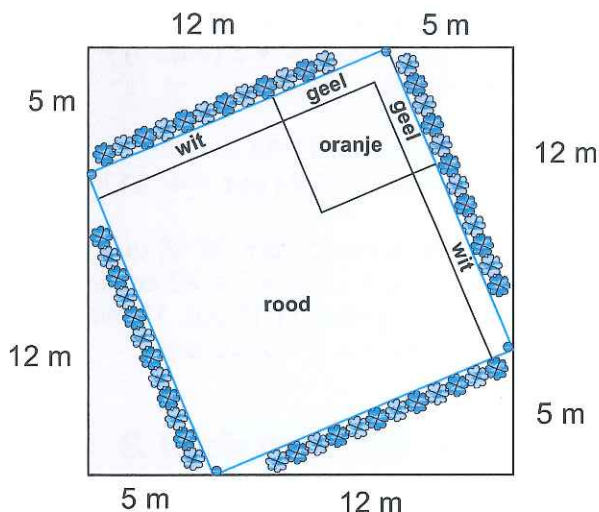
De oppervlakte van elke driehoek is $\frac{1}{2} \times 5 \times 12 = 30 \text{ m}^2$.

De oppervlakte van het vierkant tussen de vier slingers is $289 \text{ m}^2 - 120 \text{ m}^2 = 169 \text{ m}^2$.

Elke slinger is dus $\sqrt{169 \text{ m}} = 13 \text{ m}$ lang.

De kunstschilder schilderde 4 slingers van 13 m en gebruikte daarbij 125 ml verf per 4 meter. De schilder gebruikte $13 \times 125 \text{ ml} = 1625 \text{ ml}$ verf. (1,625 liter)

- 3b Er zijn meerdere manieren waarop de taarten getekend kunnen worden. Een van die manieren is de volgende:



De oppervlakte van het vierkant tussen de vier slingers is precies even groot als de oppervlaktes van de twee taarten bij elkaar: $5^2 + 12^2 = 25 + 144 \text{ m}^2 = 169 \text{ m}^2$.

Uit het antwoord bij opgave 3a volgt dat die oppervlakte ook gelijk is aan $13^2 \text{ m}^2 (=169 \text{ m}^2)$.

Als de twee taarten niet zouden overlappen, zou er helemaal geen rest zijn. Door de vierkante vorm is er wel overlapping. Het gedeelte overlapping is automatisch even groot als het gedeelte waar geen taart is, elke vierkante meter overlapping is ook een vierkante meter rest. Daarom is het oranje deel even groot als het witte deel. In het getekende voorbeeld is er 16 m^2 oranje en 16 m^2 wit.

Les**9****Het tijdspel deel 1**

- 1** Er zijn 49 lucifers nodig.
6 (voor het cijfer 0) + 2 (voor 1) + 5 (voor 2) + 5 (voor 3) +
4 (voor 4) + 5 (voor 5) + 6 (voor 6) + 3 (voor 7) +
7 (voor 8) + 6 (voor 9) = 49
- 2** Vier over half een 's middags: 12:34 uur, met 16 lucifers
Vier over half een 's nachts: 00:34 uur, met 21 lucifers
- 3** De meeste lucifers heb je nodig voor 08:08 uur, 8 over 8 's
morgens, dat leg je met $6 + 7 + 6 + 7 = 26$ lucifers.
Het minste aantal is nodig voor 11:11 uur, 11 minuten over 11 in
de morgen, dat leg je met $4 \times 2 = 8$ lucifers.

Les**10****Het tijdspel deel 2****1**

- 1a** Er moeten $24 \times 60 = 1440$ tijdstippen verdeeld worden.
- 1b** Er is een groep met één tijdstip van 8 lucifers: 11:11 uur.
De groep met 9 lucifers per tijdstip bevat twee tijdstippen: 17:11
uur en 11:17 uur.
De groep met 10 lucifers per tijdstip bevat 14:11 uur (en ook
11:41 uur, 11:14 uur en 17:17 uur).
Voorbeelden bij de andere groepen:
- | | |
|------------------------|-------------------------|
| 11 lucifers: 12:11 uur | 12 lucifers: 16:11 uur |
| 13 lucifers: 18:11 uur | 14 lucifers: 18:17 uur |
| 15 lucifers: 18:14 uur | 16 lucifers: 18:12 uur |
| 17 lucifers: 18:16 uur | 18 lucifers: 18:18 uur |
| 19 lucifers: 18:22 uur | 20 lucifers: 18:26 uur |
| 21 lucifers: 18:06 uur | 22 lucifers: 18:08 uur |
| 23 lucifers: 22:08 uur | 24 lucifers: 02:08 uur |
| 25 lucifers: 06:08 uur | 26 lucifers: 08:08 uur. |

- 1c Er zijn meerdere manieren om dit aan te tonen. Een van die redeneringen gaat als volgt:

Van de 19 groepen bevatten de 'buitenste' groepen weinig tijdstippen. Met 8, 9 10, 25 of 26 lucifers kunnen slechts 17 tijdstippen gelegd worden.

8: 11:11 uur;

9: 17:11 uur en 11:17 uur;

10: 11:14 uur, 11:41 uur, 14:11 uur en 17:17 uur;

25: 00:08 uur, 06:08 uur, 09:08 uur,

08:00 uur, 08:06 uur, 08:09 uur,

08:28 uur, 08:38 uur, 08:58 uur;

26: 08:08 uur.

Dat betekent dat voor de overige 14 groepen nog meer dan 1400 tijdstippen over zijn. Een gemiddelde van meer dan 100 per groep kan alleen behaald worden als er minstens één groep is met meer dan 100 tijdstippen.

- 1d Ter beoordeling van de leerkracht. Belangrijk is dat er goed over mogelijke voor- en nadelen gedacht wordt.

Les

11

Mobiele puzzels

- 1 verticale omschrijvingen:

1. 4.1 - 3.2 - 5.3

2. 2.1 - 8.3 - 3.2

3. 8.1 - 2.1 - 7.4

- 2 5 horizontaal: 233457

2 verticaal: 122338

1 verticaal: 123345

3 verticaal: 112478

3

1	2	3
v 8.3	i 4.3	s 7.4
4		
l 5.3	e 3.2	o 6.3
5		
a 2.1	r 7.3	k 5.2

4

1	2	3
d 3.1	o 6.3	p 7.1
4		
o 6.3	d 3.1	e 3.2
5		
p 7.1	e 3.2	t 8.1

5

Ter beoordeling van de leerkracht.

Les

12

Hoe ver komt jouw paard?

1

en 2 Verschillende antwoorden zijn mogelijk.

3

en 4 Er zijn meerdere manieren om tot 64 te komen.
 Een manier waarbij je bovendien vanaf 64 weer met een
 paardsprong naar 1 kunt is de volgende:

8	37	60	5	26	39	58	7	24
7	4	27	38	59	6	25	40	57
6	61	36	15	30	49	46	23	8
5	28	3	50	47	14	31	56	41
4	35	62	29	16	45	48	9	22
3	2	17	64	51	32	13	42	55
2	63	34	19	12	53	44	21	10
1	18	1	52	33	20	11	54	43
	A	B	C	D	E	F	G	H

Toets 3

1

lucifers minuten →	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
aantal lucifers tijdstip = aantal lucifers minuten + aantal lucifers uren							... 04 ... 55 ... 53 ... 52 ... 35 ... 33 ... 51 ... 31 ... 21 ... 47 ... 15 ... 13 ... 12	... 05 ... 03 ... 02 ... 59 ... 56 ... 50 ... 39 ... 36 ... 30 ... 29 ... 26 ... 20 ... 48		
lucifers uren ↓	... 11 1	... 17 1	... 41 2	... 14 7	... 10 8	... 18 8	... 40 13	... 48 13	... 28 6	... 08 1
4 11 ... 1	1 x 8	1 x 9	2 x 10	7 x 11	8 x 12	8 x 13	13 x 14	13 x 15	6 x 16	1 x 17
5 17 ... 1	1 x 9	1 x 10	2 x 11	7 x 12	8 x 13	8 x 14	13 x 15	13 x 16	6 x 17	1 x 18
6 14 ... 1	1 x 10	1 x 11	2 x 12	7 x 13	8 x 14	8 x 15	13 x 16	13 x 17	6 x 18	1 x 19
7 12 ... 13 ... 15 ... 21 ... 4	4 x 11	4 x 12	8 x 13	28 x 14	32 x 15	32 x 16	52 x 17	52 x 18	24 x 19	4 x 20
8 10 ... 16 ... 19 ... 01 ... 4	4 x 12	4 x 13	8 x 14	28 x 15	32 x 16	32 x 17	52 x 18	52 x 19	24 x 20	4 x 21
9 18 ... 07 ... 2	2 x 13	2 x 14	4 x 15	14 x 16	16 x 17	16 x 18	26 x 19	26 x 20	12 x 21	2 x 22
10 22 ... 23 ... 04 ... 3	3 x 14	3 x 15	6 x 16	21 x 17	24 x 18	24 x 19	39 x 20	39 x 21	18 x 22	3 x 23
11 20 ... 02 ... 03 ... 05 ... 4	4 x 15	4 x 16	8 x 17	28 x 18	32 x 19	32 x 20	52 x 21	52 x 22	24 x 23	4 x 24
12 00 ... 06 ... 09 ... 3	3 x 16	3 x 17	6 x 18	21 x 19	24 x 20	24 x 21	39 x 22	39 x 23	18 x 24	3 x 25
13 ... 1	1 x 17	1 x 18	2 x 19	7 x 20	8 x 21	8 x 22	13 x 23	13 x 24	6 x 25	1 x 26

Uit de tabel blijkt dat je met 18 lucifers het grootste aantal tijdstippen kunt leggen. Voor 186 tijdstippen heb je precies 18 lucifers nodig.

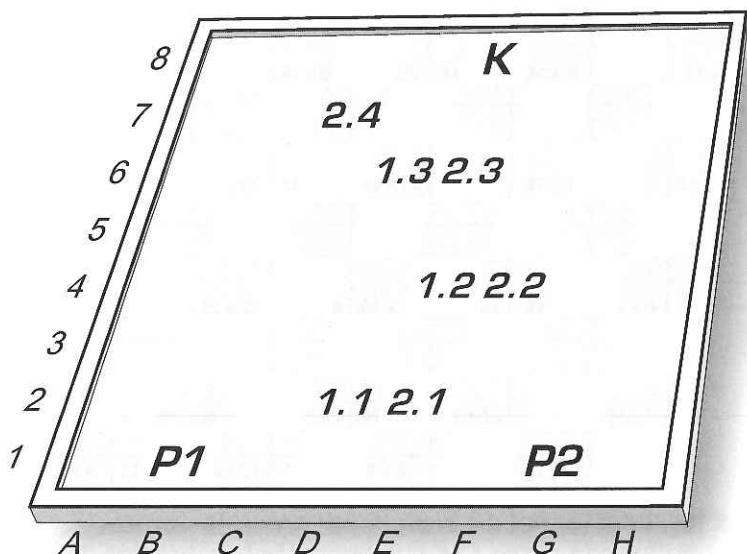
2

	1 g			
2 d	r	a	3 a	k
	o		d	
4 l	o	p	e	n
	t		m	

3

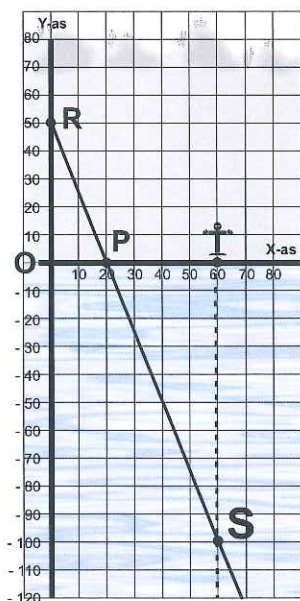
3a Paard 1 (let op het rugnummer) kan de zwarte koning het eerst schaak zetten.

3b Paard 1 kan het in drie zetten. (bijv. 1.1, 1.2 en 1.3)
Paard 2 heeft vier zetten nodig. (bijv. 2.1, 2.2, 2.3 en 2.4)



- 1 Eigen invulling mogelijk.
- 2 De x-coördinaat van het schip is dezelfde als de x-coördinaat van toeschouwer T. $x = 60$.
- 3 Eigen invulling mogelijk.
- 4 Punt R heeft als coördinaten $(0, 50)$.

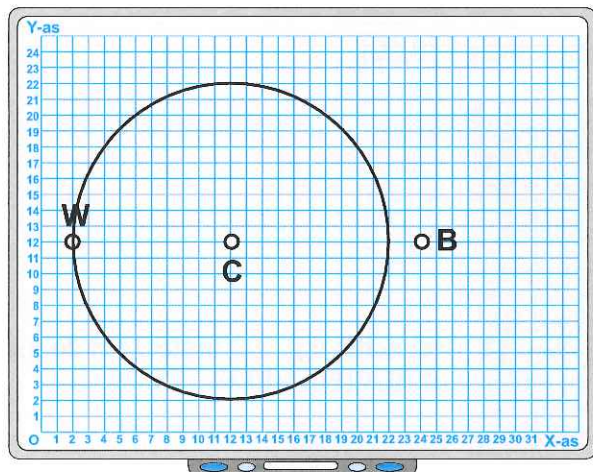
5



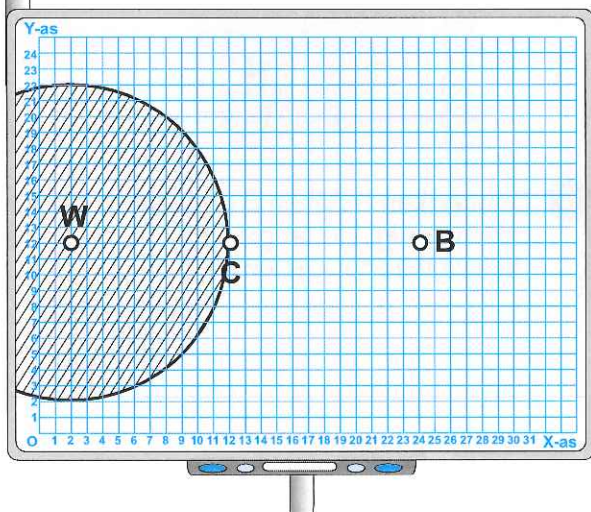
Het schip ligt 100 meter van de kust af. $S = (60, -100)$.

- 6 Driehoeken ROP en STP hebben dezelfde vorm, ze zijn gelijkvormig. De lengtes PT, TS en PS zijn twee keer zo lang als de lengtes PO, OR en PR.

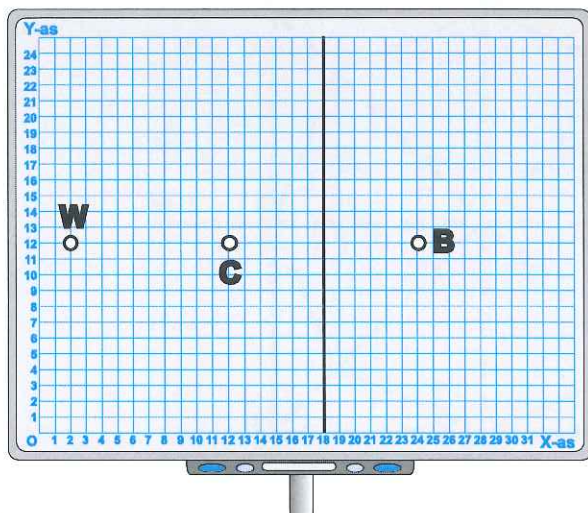
- De mogelijke plaatsen voor een nieuwe school volgens het advies van de Bewonerspartij vormen een cirkel met C als middelpunt.
Mevrouw Verloopen tekende die cirkel waarschijnlijk met een passer.



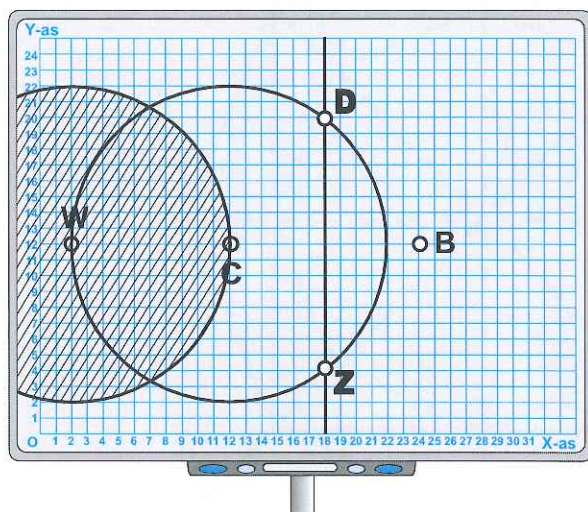
- De Westpartij wil geen scholen binnen 1 kilometer van basisschool Wolkenloos (W). In het gearceerde gebied binnen de cirkel mogen dus geen nieuwe scholen gebouwd worden.



- 3 De mogelijke plaatsen voor nieuwe scholen volgens het standpunt van de Nieuwpartij liggen op een verticale lijn precies tussen C en B.
Alle punten op die lijn hebben de x-coördinaat 18.

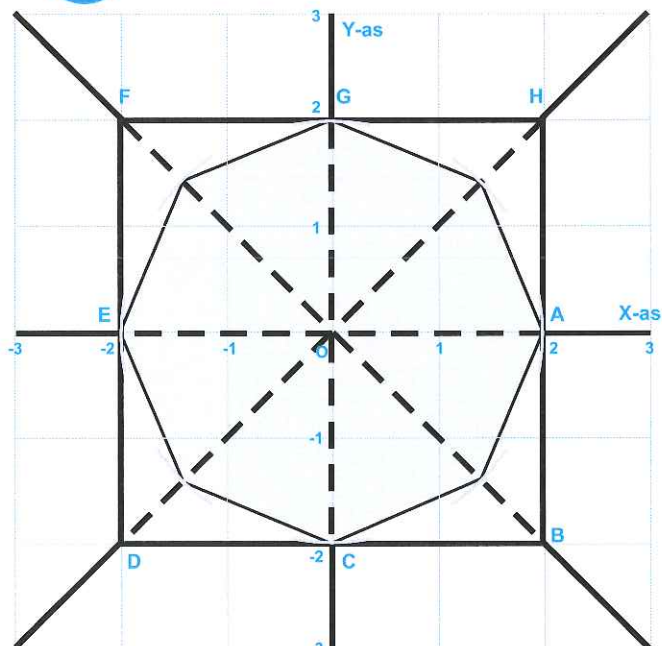


- 4 Als de partijen goed naar elkaar luisteren zullen ze snel tot overeenstemming komen. Met de nieuwe scholen op de plaatsen D en Z wordt gehoor gegeven aan de wensen van alle drie de partijen.

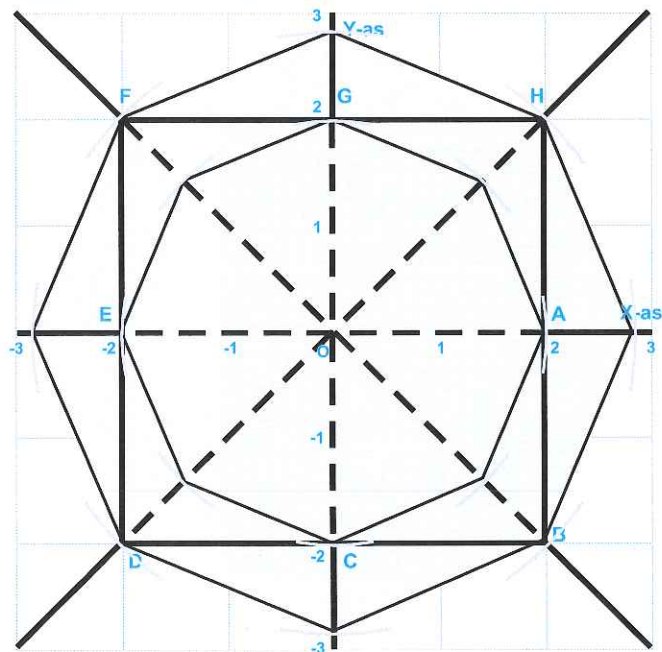


- 5 $D = (18, 20)$ en $Z = (18, 4)$ of $D = (18, 4)$ en $Z = (18, 20)$

1

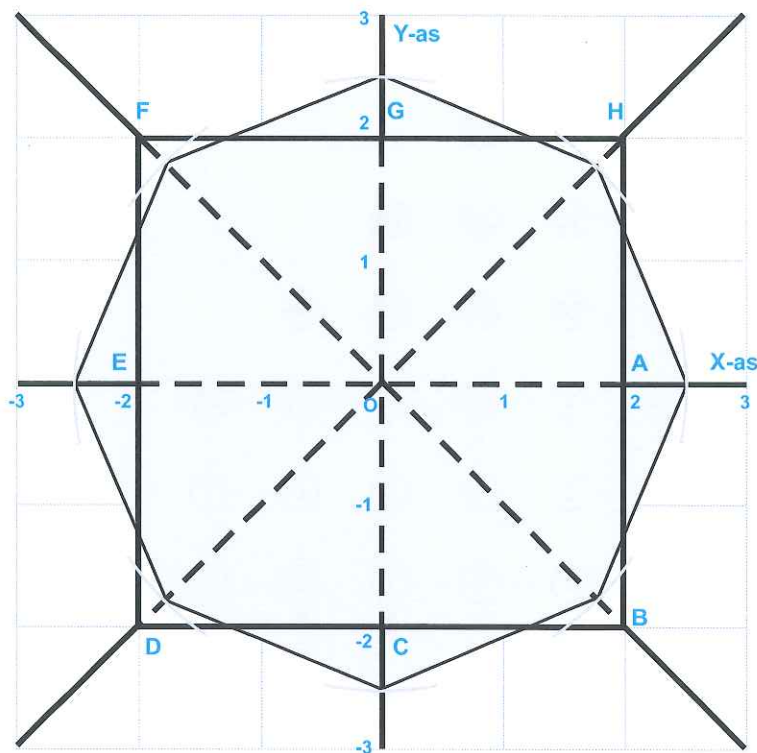


2

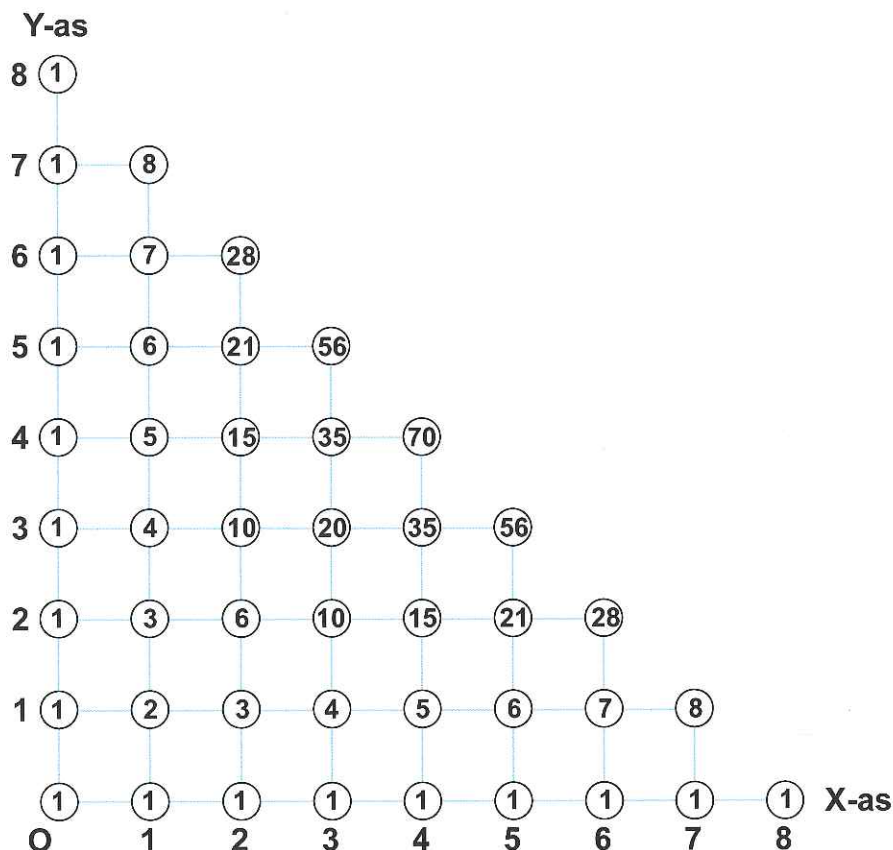


- 3 Johnny gebruikte zijn geleende liniaal om precies het midden tussen een hoekpunt van de kleine achthoek en een bijbehorend hoekpunt van de grote achthoek te tekenen. Vervolgens gebruikte hij zijn passer om de andere zeven hoekpunten te tekenen. Daarna verbond hij de acht hoekpunten.

Het midden tussen een hoekpunt van de kleine achthoek en een bijbehorend hoekpunt van de grote achthoek kan overigens ook getekend worden met alleen een passer.



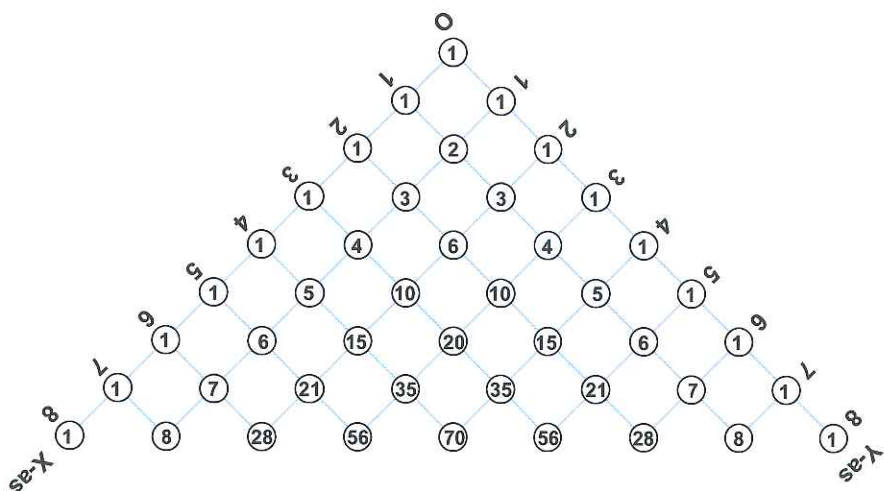
- 1 Er zijn 3 achterblijvers op roosterpunt (1,2).
Er zijn 6 achterblijvers op roosterpunt (2,2).



- 2 Op (47,1) zijn 48 achterblijvers.
Op (15,2) zijn 136 achterblijvers.
In de rij op hoogte 2 zit een mooie regelmaat: 1, 3, 6, 10,
Het getal op (15,2) is de zestiende term in die rij.
Op (15,2) zijn $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 + 11 + 12 + 13 + 14 + 15 + 16 = 8 \times 17 = 136$ achterblijvers.
- 3 In figuur 2 kunnen de mieren lopen tot de lijn $x + y = 8$.

- 4 Op de lijn $x + y = 3$ zijn 8 ($1+3+3+1$) mieren achtergebleven.
Op de lijn $x + y = 4$ zijn 16 ($1+4+6+4+1$) mieren achtergebleven.
- 5 Op lijn $x + y = 8$ blijven $2^8 = 256$ mieren achter.
De mier op $(8,0)$ rekt snel uit dat er tot en met zijn lijn $x + y = 8$ in totaal $1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 + 128 + 256 = 511$ mieren achterblijven.
- 6 De mier op $(0,8)$ heeft ontdekt dat er telkens op iedere lijn $x + y = \dots$ één mier meer achterblijft dan op alle voorgaande lijnen $x + y = \dots$ bij elkaar.
Zo weet deze mier dus dat er in totaal tot en met de lijn $x + y = 7$ één mier minder overblijft dan het aantal dat achterblijft op haar eigen lijn $x + y = 8$. In totaal blijven er 256 (op $x + y = 8$) $+ 255$ (tot en met $x + y = 7$) $= 511$ mieren achter.

In onderstaande afbeelding staat de verder ingevulde driehoek van Pascal.



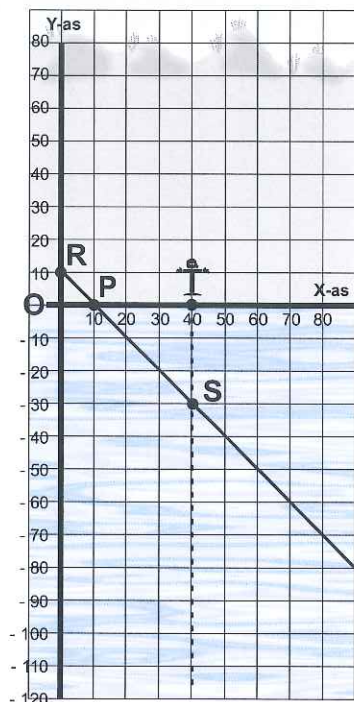
Toets 4

- 1 Ter beoordeling van de leerkracht.
Dat kan het best gebeuren nadat een andere leerling de figuur heeft proberen te maken.

Eindtoets A

- 1 $10 \times 18 \times 20 = 2 \times 5 \times 2 \times 3 \times 3 \times 2 \times 2 \times 5$
Dat zijn 8 delers.
De 8 staat voor de letter t, u of v.
- 2 Er zijn 7 indelingen.
1-64, 2-32, 4-16, 8-8, 16-4, 32-2, 64-1.
De 7 staat voor de letter p, q, r of s.
- 3 Het grootste getal is 512 ($= 2^9$).
Het op een na grootste getal is 256 ($= 2^8$).
 $2 + 5 + 6 = 13$, $1 + 3 = 4$.
De 4 staat voor de letter g, h of i.
- 4 Zijde c = 20 m.
 $2 + 0 = 2$.
De 2 staat voor de letter a, b of c.
- 5 Drie minuten voor tien 's avonds is 21:57 uur.
Dat leg je met $5 + 2 + 5 + 3 = 15$ lucifers.
 $1 + 5 = 6$.
De 6 staat voor de letter m, n of o.
- 6 Het zwarte paard kan naar 4 verschillende plaatsen springen.
Naar de vakken G2, F3, F5 en G6.
De 4 staat voor de letter g, h of i.

7



De y-coördinaat van S = -30.

$3 + 0 = 3$.

De 3 staat voor letter d, e of f.

8

De afstand tussen O en (3,4) is 5 cm.

(In Les 8 kon je zien dat $3^2 + 4^2 = 5^2$)

De 5 staat voor de letter j, k of l.

1	2	3	4	5	6	7	8
t	r	i	a	n	g	e	l

Eindtoets B

10-11-2019

10p

Ter beoordeling van de leerkracht.

