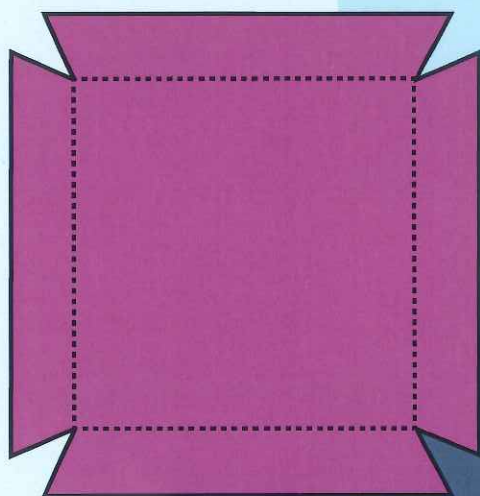


Pascal Goderie

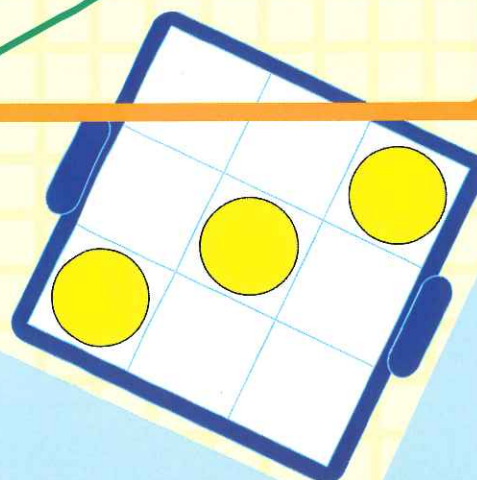
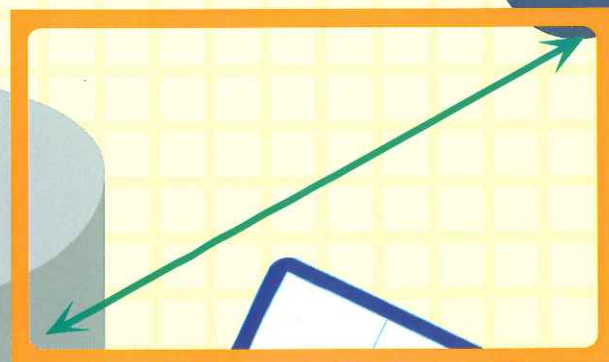
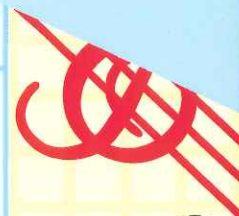
TOPkl▲ssers

wiskunde

deel 3



	3	4
1	12	13
20	21	22



werkboek van
groep

TOPklassers

Wiskunde

deel 3

Werkboek

Auteur
Pascal Goderie

Inhoud

Inleiding voor de leerling.....	3
Les 1 De slimschuifwedstrijd deel 1	4
Les 2 De slimschuifwedstrijd deel 2	6
Les 3 De machtige drie.....	8
Les 4 Goocheltruc voor snelle rekenaars	10
Toets 1	12
Les 5 Drie kaarsjes deel 1	14
Les 6 Drie kaarsjes deel 2	16
Les 7 Wiscalculie deel 1	18
Les 8 Wiscalculie deel 2	20
Toets 2	22
Les 9 Breedbeeldtelevisie deel 1	24
Les 10 Breedbeeldtelevisie deel 2	26
Les 11 Voetbaluitslagen Champions League deel 1	28
Les 12 Voetbaluitslagen Champions League deel 2	30
Toets 3	32
Les 13 Vrijdag de dertiende.....	34
Les 14 De 'snelste' vrachtwagen	36
Les 15 Een bouwdoos?	38
Les 16 Bekijk het... van een andere kant	40
Toets 4	42
Eindtoets A	44
Eindtoets B	46

Inleiding voor de leerling

Dag Topklasser,

De kans is groot dat jij *goed* in rekenen-wiskunde bent.

De kans is groot dat jij *beter* met pittige vraagstukken bezig kunt zijn.

De kans is groot dat jij *best* graag hard werkt om een goed antwoord te vinden.

Daarom ligt hier voor je het derde deel van *Topklassers Wiskunde*.

Dit werkboek staat vol met wiskundige vraagstukken.

Vraagstukken waaraan zelfs ook veel middelbare scholieren hun hart kunnen ophalen.

Jij bent vast iemand die al op de basisschool een extra uitdaging aankan.

En je bent vast iemand die goed kan doorzetten.

Dan zul je vast ook kunnen smullen van alle interessante problemen.

Problemen om alleen of samen met andere Topklassers te lijf te gaan.

Is het niet leuk om zelf een onnavolgbare goocheltruc in elkaar te zetten?

Of eens diep na te denken over ingewikkelde vraagstukken zoals bij vrijdag de dertiende of de Champions League?

Ga er eens lekker voor zitten en laat je verrassen.

Misschien verras jij ons met slimme wiskundige bewijzen?

Als je een les afhebt, vraag dan aan de leerkracht het antwoordenboek.

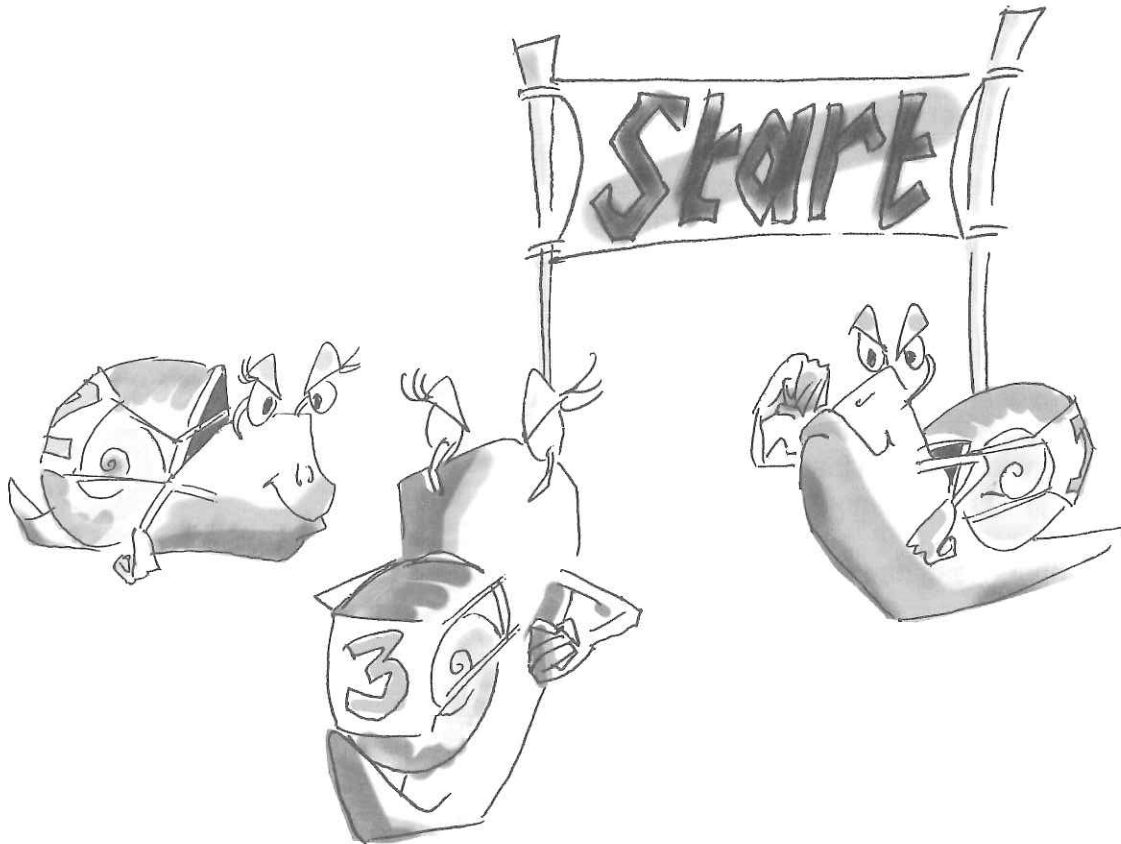
Veel plezier en succes.

Laat zien dat jij een echte *wiskunde topklasser* bent!

Pascal Goderie

Les 1 De slimschuifwedstrijd deel 1

Over de tegels van een schoolplein houden de slakken Appie, Beppie en Cora een slimschuifwedstrijd. De hardloopwedstrijd die oorspronkelijk op het programma stond had geen zin, slakken kunnen nu eenmaal niet lopen en bovendien zijn Appie, Beppie en Cora even snel. Als de slakken vanaf de start in een rechte lijn richting finish zouden schuiven, zouden zij daar alle drie even lang over doen.



Slak Appie heeft voorgesteld om het parcours uit te breiden.

Hij heeft een slijmspoor getrokken over de gehele lengte van het schoolplein.

Dit spoor is te zien op figuur 1 op de volgende pagina.

De drie slakken schuiven niet rechtstreeks van start naar finish, maar ze moeten onderweg het slijmspoor aanraken.

Elke slak mag echter zelf kiezen op welke plaats hij of zij het spoor aanraakt.

De drie slakken bereiden zich uitermate goed voor en stippelen ieder voor zich de route uit die ze gaan schuiven.

In figuur 1 is voor elk van de drie slakken een (richt)punt aangegeven dat door de betreffende slak zal worden gepasseerd. Slak Appie zal punt A passeren, slak Beppie passeert punt B en slak Cora passeert punt C.

1 Een van de drie slakken heeft de kortst mogelijke route uitgestippeld.

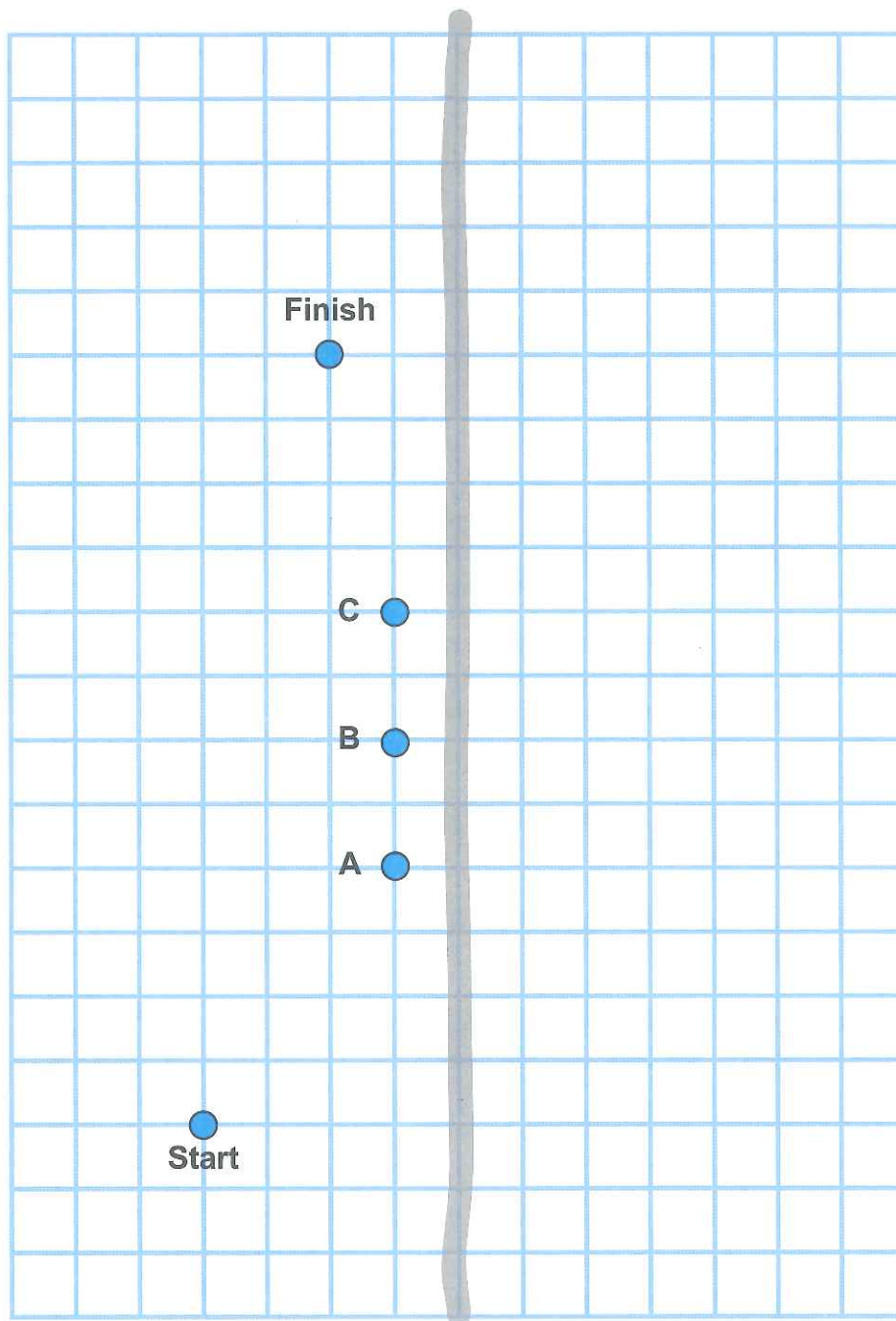
Welke slak zal de kortste route schuiven? Waarom is dat zo?

Kun je dat in de tekening laten zien?

.....

.....

.....



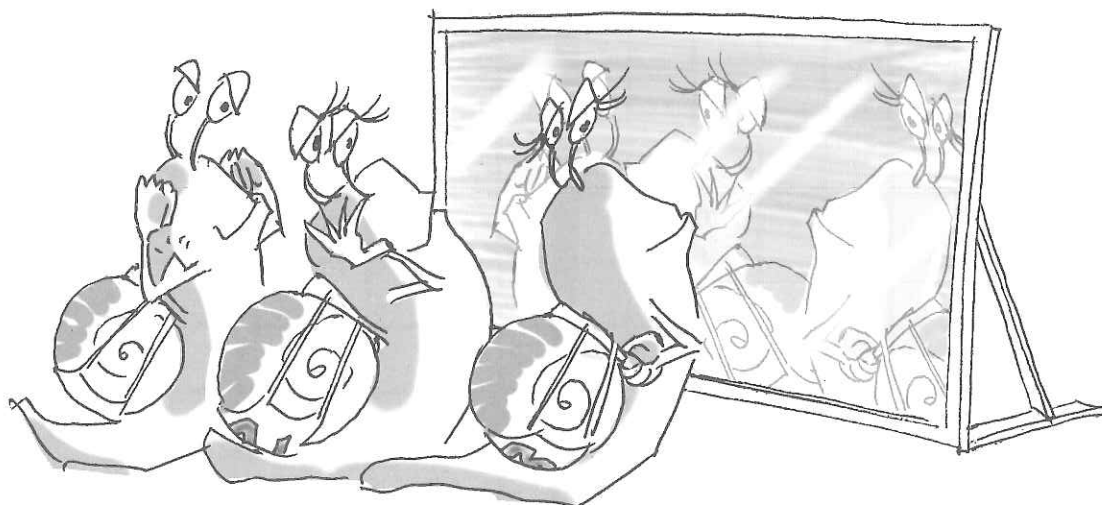
figuur 1



In Les 2 gaan we nog even door op dit probleem. We maken het nog wat lastiger.
Maar je vindt daar ook een aanwijzing waarmee je bovenstaand probleem kunt oplossen.

Les 2 De slimschuifwedstrijd deel 2

In Les 1 hielden drie slakken een slimschuifwedstrijd. Een manier om erachter te komen wie de slimste route uitgestippeld had, is om het slijmspoor als een spiegellijn te beschouwen.



Voor de lengte van de route maakt het niet uit of de slak vanaf de plaats waar hij of zij het slijmspoor raakt naar de finish schuift of doorschuift aan de andere kant van het spoor. De slak schuift dan in een rechte lijn verder naar SF (SpiegelFinish).

SF is het spiegelpunt van Finish bij spiegelen in het slijmspoor als spiegellijn. (zie figuur 1)

De vraag wie de kortste route had uitgestippeld, komt dan neer op de volgende vraag:

- 1 Op welke manier is de route van Start naar SF het kortst? Is de kortste route via punt A, via punt B of via punt C?

.....

.....

.....

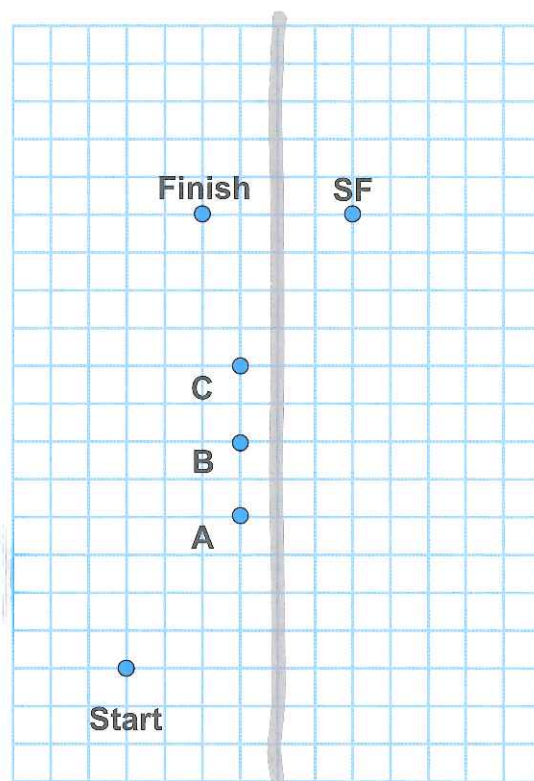
- 2 Dus welke slak uit Les 1 zal de kortste route schuiven?

.....

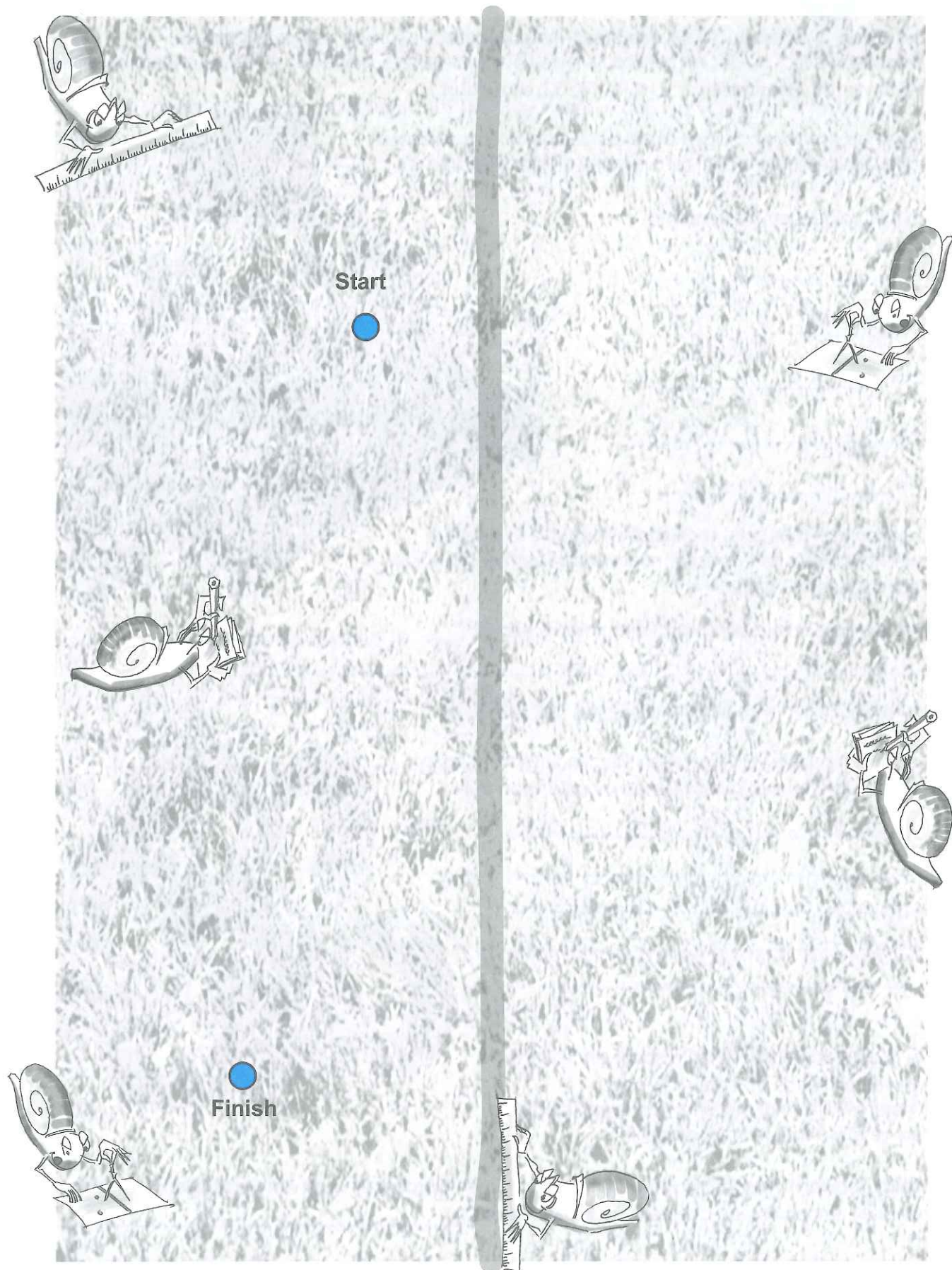
Maar zoals beloofd maken we het probleem nog wat lastiger.

De slimschuifwedstrijd wordt nu niet op een betegeld plein gehouden, maar op een grasveld. Op de volgende pagina staat figuur 2 met een Start, een Finish en een slijmspoor.

- 3 Construeer in die tekening de kortste route van Start naar Finish via het slijmspoor. Gebruik daarbij potlood, passer en liniaal. Een nog grotere prestatie lever je als je de liniaal alleen gebruikt om rechte lijnen te trekken en niet om afstanden op te meten.



figuur 1



figuur 2

Les 3 De machtige drie

In deel 2 van Topklassers Wiskunde staat een goocheltruc op basis van getalkaartjes.

Die truc werkt altijd, omdat elk getal op precies één manier te schrijven is als som van verschillende machten van 2. (De getallen 1, 2, 4, 8, 16, 32, enzovoort.)

Je zou je nu af kunnen vragen of zoiets ook geldt voor machten van drie. Welke getallen zijn dat eigenlijk, de machten van 3?

- 1** Vul het volgende rijtje verder in:

$3^1 =$

$$3^2 = 3 \times 3 = 9$$

$3^3 =$

$3^4 =$

$3^5 =$ _____

De exponent (het getal rechtsboven) geeft aan hoeveel keer het getal 3 met zichzelf moet worden vermenigvuldigd. Voor exponent 0 geldt $3^0 = 1$.



- 2 Wat is de kleinste macht van 3 die groter is dan 2^{10} ?

Het getal 36 kun je schrijven als $9 + 27$, ofwel $3^2 + 3^3$.

- 3 Noem nog minstens vijf getallen die geschreven kunnen worden als som van verschillende machten van drie.



Nu is de vraag of elk getal te schrijven is als som van verschillende machten van drie. Waarschijnlijk vind je al snel een tegenvoorbeeld, een getal waarbij het niet mogelijk is.

- 4 Welke getallen onder de 10 kunnen niet geschreven worden als som van verschillende machten van drie? (machten van drie zelf niet meegerekend)

Je kunt gemakkelijk nagaan dat enorm veel getallen niet op zo'n manier te schrijven zijn. En toch is het mogelijk om alle getallen te 'vangen' met behulp van machten van drie. Als we een getal als combinatie van machten van twee schrijven zijn er voor elke macht twee mogelijkheden: wel meedoen of niet meedoen. Denk hierbij aan de lampjes in Les 6 van deel 2 van *Topklassers Wiskunde*.

Als je een getal als combinatie van machten van drie wilt schrijven moet je uitgaan van drie mogelijkheden voor elke macht van drie:

positief meedoen
(macht optellen)

negatief meedoen
(macht aftrekken)

niet meedoen
(macht niet meerekenen)

- 5 Probeer dit maar eens te doen voor de getallen 5, 7, 10, 25 en 32.

$$2 = 3 - 1$$

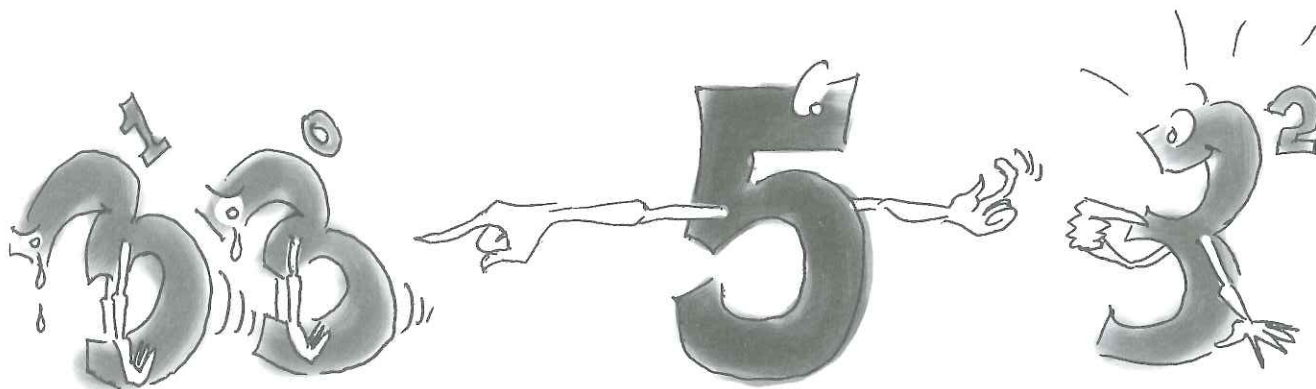
$$10 = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$5 = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$25 = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$7 = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$32 = \underline{\hspace{2cm}}$$



5 is het eerste getal waarbij je niet genoeg hebt aan de machten 3^1 en 3^0 .

Voor 5 heb je 3^2 nodig, er geldt: $5 = 9 - 3 - 1$

- 6 Hoe maak je 13? $13 = \underline{\hspace{2cm}}$

Kijk eens goed naar de manier waarop 5 is samengesteld.
Kun je daaruit afleiden hoe je 13 kunt maken?

$\underline{\hspace{2cm}}$

- 7 Hoe kun je 14 opbouwen uit machten van drie? $14 = \underline{\hspace{2cm}}$

- 8 Wat is het eerste getal waarbij je 3^4 nodig hebt? $\underline{\hspace{2cm}}$

- 9 Wat is het laatste getal waarbij je 3^5 of een hogere macht nog niet nodig hebt?

$\underline{\hspace{2cm}}$

- 10 Kun je een getal vinden dat je op twee verschillende manieren met machten van drie kan opbouwen? Elke macht mag je steeds maar één keer gebruiken.

$\underline{\hspace{2cm}}$

In Les 4 kun je met machten van drie een goocheltruc maken die nog meer indruk zal maken dan de kaarttruc met machten van twee uit deel 2 van *Topklassers Wiskunde*.

Les 4 Goocheltruc voor snelle rekenaars

In deze les gebruiken we machten van drie om een knappe goocheltruc te maken.

In Les 3 heb je kennisgemaakt met machten van drie.

Ieder getal is te schrijven als combinatie van machten van drie.

Je moet dan wel uitgaan van drie mogelijkheden voor elke macht van drie:

positief meedoen (+)
(macht optellen)

negatief meedoen (-)
(macht aftrekken)

niet meedoen (0)
(macht niet meerekenen)



In de volgende tabel kun je dat goed zien.

	3^0	3^1	3^2	3^3	3^4	3^5
	1	3	9	27	81	243
1	+	0	0	0	0	0
2	-	+	0	0	0	0
3	0	+	0	0	0	0
4	+	+	0	0	0	0
5	-	-	+	0	0	0
6	0	-	+	0	0	0
7	+	-	+	0	0	0
8	-	0	+	0	0	0
9	0	0	+	0	0	0
10	+	0	+	0	0	0



Zoals in bovenstaande tabel kun je ook van andere getallen uitzoeken hoe je ze kunt opbouwen uit machten van drie. Duidelijk wordt dan dat je voor ieder getal precies één manier kunt vinden om de plussen, nullen en minnen te plaatsen.

Je kunt de tabel natuurlijk zo uitgebreid maken als je wilt. Hoe groter de getallen worden hoe meer machten van drie je zult moeten bekijken.

We beschrijven nu stap voor stap hoe je de goocheltruc kunt maken.

Het is niet eenvoudig, maar het resultaat is de moeite waard!

Hoe maak je de goocheltruc met machten van 3?

stap 1: de tabel

Onderzoek eerst hoe getallen zijn opgebouwd uit machten van drie.

Maak voor de getallen 1 tot en met 27 een schema zoals in bovenstaande tabel.

stap 2: de kaartjes

Onderzoek vervolgens welke getallen er op de kaartjes moeten staan.

Bij deze truc gebruik je zeven kaartjes.

Bij vier van de kaartjes gaat het om de machten van drie die je moet optellen, bij de andere drie gaat het om de machten die je moet aftrekken.



Schrijf op *kaartje 1* alle getallen waarbij macht 3^0 positief meedoet.
Schrijf op *kaartje 2* alle getallen waarbij macht 3^1 positief meedoet.
Schrijf op *kaartje 3* alle getallen waarbij macht 3^2 positief meedoet.
Zet steeds het *kleinste getal linksboven*.

Schrijf op *kaartje 4* alle getallen waarbij macht 3^3 positief meedoet.
Op dit kaartje staan geen negen, maar veertien getallen.
Zet het *kleinste getal linksboven*.



Schrijf op *kaartje 5* alle getallen waarbij macht 3^0 negatief meedoet.
Schrijf op *kaartje 6* alle getallen waarbij macht 3^1 negatief meedoet.
Schrijf op *kaartje 7* alle getallen waarbij macht 3^2 negatief meedoet.
Zet bij deze drie kaartjes het *kleinste getal rechtsonder*.

stap 3: de truc

Vraag de persoon met wie je de truc doet om in gedachten een getal onder de 28 te kiezen.
Laat hem of haar de kaarten apart leggen waarop het gekozen getal staat.



Bij alle apart gelegde kaartjes is er een getal dat positief of negatief meetelt.

Staat het kleinste getal linksboven, dan telt een macht van drie positief mee. Dat is steeds de macht die direct volgt op het kleinste getal. Behalve als het getal 1 linksboven staat, dan telt 1 mee.

Al deze machten van drie tel je bij elkaar op.

Staat het kleinste getal rechtsonder, dan telt een macht van drie negatief mee. In dit geval is dat de macht die direct voorafgaat aan het kleinste getal.

Al deze machten van drie trek je af van het resultaat bij het optellen.

Het getal dat je op deze manier (zo snel je kunt) berekent, is het gezochte getal!

Op de kaartjes in deze versie staan niet zo heel veel getallen. De ander denkt misschien wel dat je heel snel de kaartjes afspeurt. Als je de truc uitbreidt en kaartjes met meer getallen gebruikt kan dat bijna niet meer. Je oogst dan waarschijnlijk nog meer bewondering. Kun jij de truc uitbreiden?

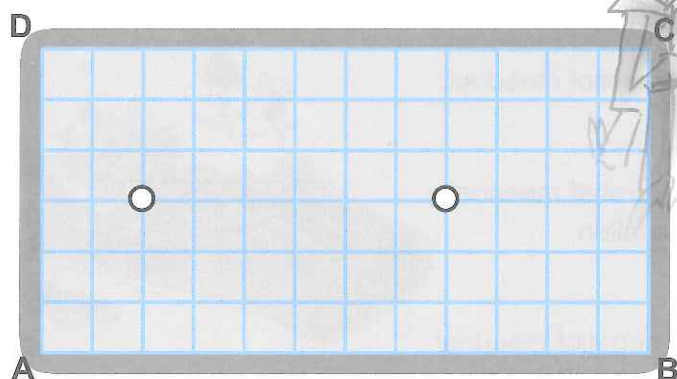
- 1 Voor welke getallen moet je dan de tabel maken?
Hoeveel kaartjes moet je dan maken? Hoeveel getallen staan er op de kaartjes?

Toets 1

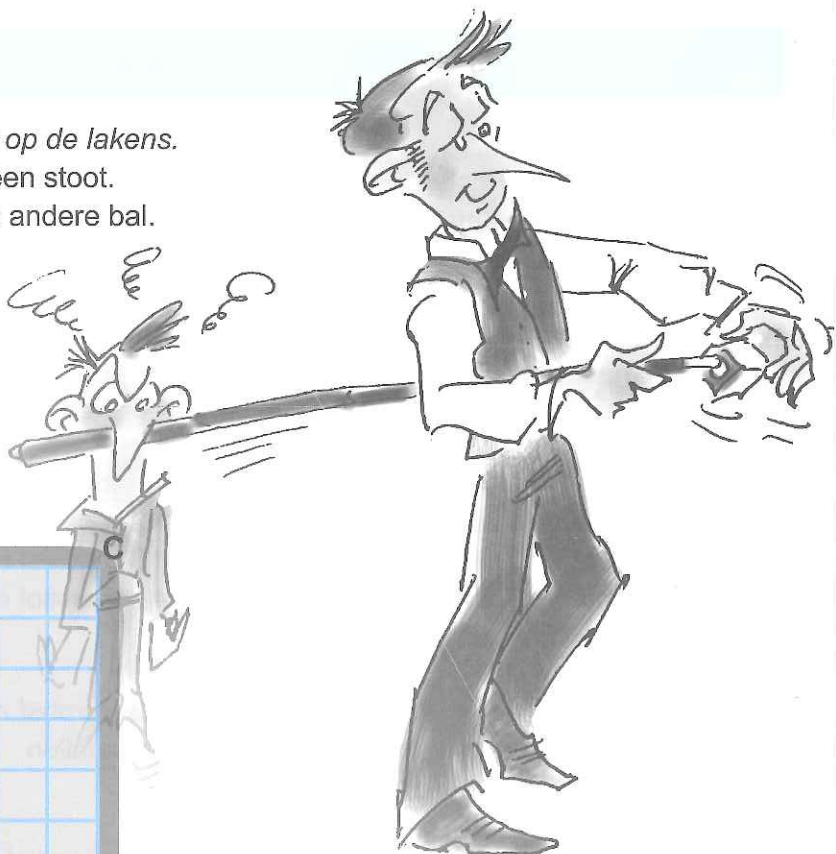
De oefenbiljarts in deze toets hebben ruitjes op de lakens.

- 1 Op het biljart in figuur 1 maakt een biljarter een stoot.
Via band DC speelt hij de linkerbal vol op de andere bal.
(zonder effect te geven)

Teken de baan van de biljartbal.

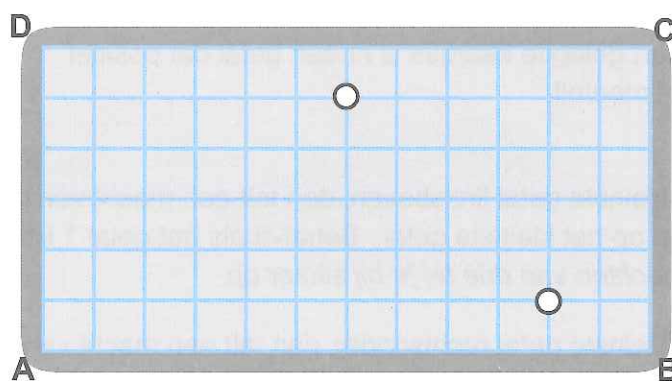


figuur 1



- 2 Op het biljart in figuur 2 wordt ook een bandstoot gemaakt.
De biljartbal het dichtst bij band DC is de speelbal.
De andere bal moet vol geraakt worden.
De biljartster denkt na via welke band zij het best kan spelen.
Zij wil het liefst dat de bal de band op een roosterpunt raakt.

Via welke band zal de biljartster spelen? Teken de baan van de bal.



figuur 2



- 3 Harrie Horloge doet de goocheltruc met machten van drie.
Een vrouw uit het publiek heeft de volgende kaarten apart gelegd:

2	3	4
11	12	13
20	21	22

14	15	16	17	18
19	20		21	22
23	24	25	26	27

26	23	20
17	14	11
8	5	2

22	21	20
19	18	17
16	15	14

Welk getal heeft de vrouw in gedachten genomen?

.....

.....



- 4 Bij dezelfde show heeft even later een man de volgende kaarten apart gelegd:

2	3	4
11	12	13
20	21	22

5	6	7
8	9	10
11	12	13

26	23	20
17	14	11
8	5	2

25	24	23
16	15	14
7	6	5

Welk getal heeft deze man in gedachten genomen?
Wat kun je over deze situatie zeggen?

.....

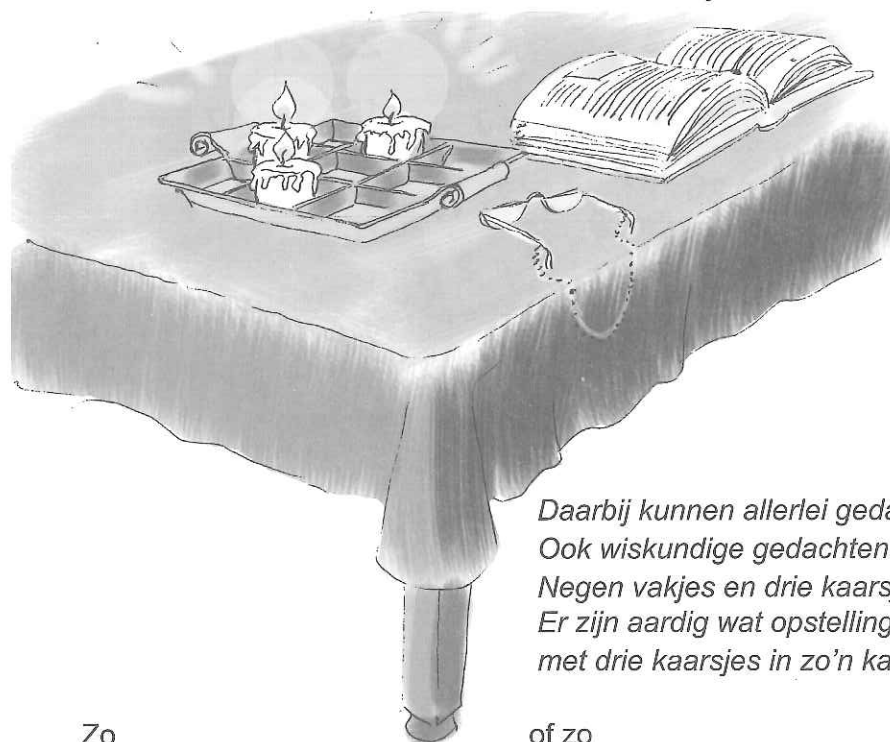
.....

.....



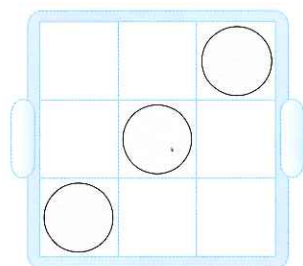
Les 5 Drie kaarsjes deel 1

Een regenachtige dag is vaak een mooie dag om kaarsjes te laten branden. Vaak is er dan ook wel een moment om naar de kaarsjes te turen.



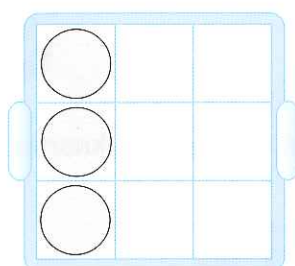
Daarbij kunnen allerlei gedachten naar boven komen. Ook wiskundige gedachten. Negen vakjes en drie kaarsjes. Er zijn aardig wat opstellingen mogelijk met drie kaarsjes in zo'n kaarsenhouder.

Zo



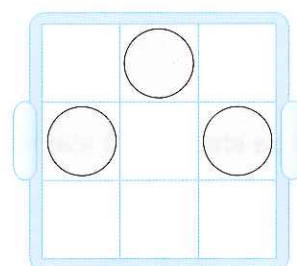
figuur 1

of zo



figuur 2

of zo:



figuur 3

1 Hoeveel verschillende opstellingen zijn er met drie kaarsjes in de kaarsenhouder?

Het is bij deze vraag belangrijk om goed af te spreken wat we tellen als verschillende opstellingen.

Let op: Alle situaties waarbij precies dezelfde vakjes in de houder bezet zijn, worden geteld als een en dezelfde opstelling.

Dus als je twee kaarsjes omwisselt geldt het resultaat niet als een andere opstelling. Met behulp van de aanpak in opgave 2 en 3 kun je op het spoor van de oplossing komen. Of je kunt je aanpak vergelijken als je de oplossing al (bijna) gevonden hebt.

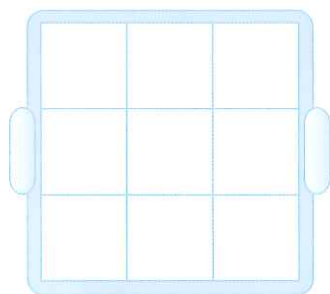
2 Vaak helpt het bij een dergelijk probleem om eerst een eenvoudiger versie van het probleem te bedenken en op te lossen. Dezelfde manier van oplossen kun je dan ook toepassen in de meer complexe versie.

Hoe kun je het probleem vereenvoudigen?

Het volgende vraagstuk is een eenvoudiger versie van het probleem:

3 Hoeveel verschillende opstellingen zijn er met twee kaarsjes in de kaarsenhouder?

Je kunt de oplossing vinden door systematisch een aantal vragen te beantwoorden.
In het begin ga je er vanuit dat de kaarsenhouder met negen vakjes nog leeg is.



figuur 4



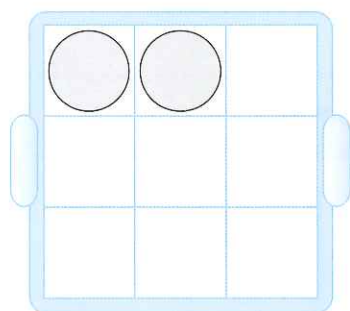
3a Hoeveel vakjes zijn er waarin je het eerste kaarsje kunt zetten?

Bij elk van die posities blijft hetzelfde aantal vakjes over voor het tweede kaarsje.

3b Hoeveel vakjes blijven er steeds over om het tweede kaarsje in te zetten?

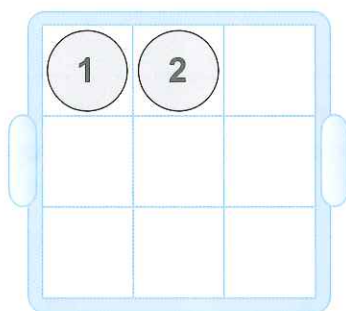
3c Op hoeveel verschillende manieren kun je dus de twee kaarsjes in de houder plaatsen?

Maar niet al die verschillende manieren leiden tot verschillende opstellingen.
De opstelling met twee kaarsjes



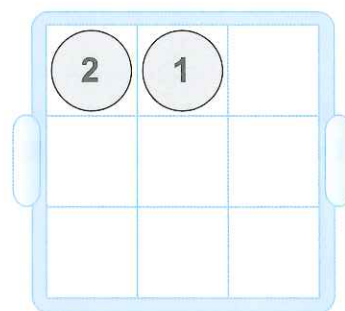
figuur 5

komt
voor
als



figuur 6

en
als



figuur 7

In de opstelling van figuur 5 kunnen kaarsjes 1 en 2 staan als in figuur 6 of als in figuur 7. Bij vraag 3c zijn dit twee verschillende manieren. Omdat echter precies dezelfde vakjes in de houder bezet zijn, tellen we ze als een en dezelfde opstelling.

3d Op hoeveel manieren kan elke opstelling voorkomen?

3e Hoeveel verschillende opstellingen zijn er dus met twee kaarsjes in de kaarsenhouder?

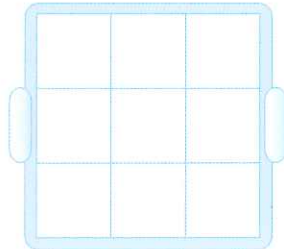
Via bovenstaande stappen vind je het antwoord op vraag 3. Bedenk nu zelf soortgelijke vragen voor drie kaarsjes in een houder met negen vakjes. Vind je zo het antwoord op vraag 1? In het eerste deel van Les 6 kun je controleren of je het goed gedaan hebt.

Les 6 Drie kaarsjes deel 2

In Les 5 riep het turen naar kaarsjes een wiskundig probleem op.
We hebben eerst een vereenvoudigde versie van het probleem opgelost.
Op dezelfde wijze zoeken we het antwoord op de meer complexe vraag:

- 1 Hoeveel verschillende opstellingen zijn er met drie kaarsjes in de kaarsenhouder?

Ook nu kun je de oplossing vinden door systematisch een aantal vragen te beantwoorden.
Weer ga je in het begin uit van een lege kaarsenhouder met negen vakjes.

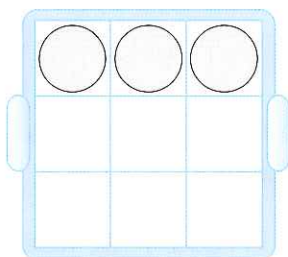


figuur 1

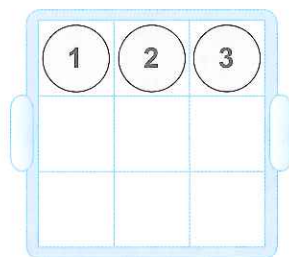


- 1a Hoeveel vakjes zijn er waarin je het eerste kaarsje kunt zetten?
- 1b Hoeveel vakjes blijven er bij elk van die posities over om het tweede kaarsje in te zetten?
- 1c Op hoeveel verschillende manieren kun je dus de eerste twee kaarsjes in de houder plaatsen?
- 1d Hoeveel vakjes blijven er bij elk van deze manieren over voor het derde kaarsje?
- 1e Hoeveel verschillende manieren zijn er dus om de drie kaarsjes in de houder te plaatsen?

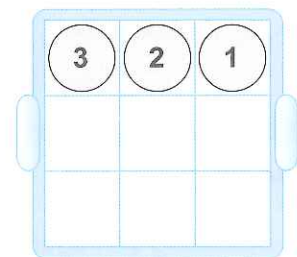
Maar ook nu gelden niet al die verschillende manieren als verschillende opstellingen.
De hieronder afgebeelde opstelling met drie kaarsjes komt op verschillende manieren voor.



figuur 2



figuur 3



figuur 4

Maar zelfs ook nog op andere manieren.
Er zijn drie plaatsen beschikbaar voor drie kaarsjes 1, 2 en 3.

- 1f Hoeveel verschillende manieren zijn er met de kaarsjes 1, 2 en 3 om de opstelling van figuur 2 te maken?
- 1g Zijn er voor elke andere opstelling met drie kaarsjes ook steeds zoveel manieren?

1h Hoeveel verschillende opstellingen zijn er dus met drie kaarsjes in de kaarsenhouder?

We zijn benieuwd of je deze aanpak kunt voortzetten naar een nog complexere situatie.
Misschien kun je al voorspellen wat de volgende vraag zal zijn.

2 Hoeveel verschillende opstellingen zijn er met vier kaarsjes in de kaarsenhouder?



Als je de smaak te pakken hebt kun je natuurlijk steeds een stapje verder gaan.

3 Kun je het verloop van de antwoorden voorspellen bij steeds meer kaarsjes in de houder?
Wordt het aantal verschillende opstellingen dat mogelijk is steeds groter?
Denk hierbij ook aan wat uiteindelijk het aantal verschillende opstellingen zal zijn met negen kaarsjes in de kaarsenhouder.

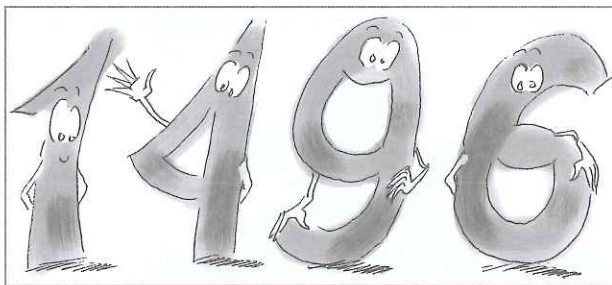
Dat is nu zo leuk in de wiskunde.
Een vraag die is opgelost roept soms alweer een nieuwe vraag op.
Ieder afzonderlijk kaarsje kan namelijk branden, maar het kan ook uit zijn.
Welke verschillende mogelijkheden levert dat op?

Dit is misschien wel een mooi probleem voor deel 4 van *Topklassers Wiskunde*.
We verklappen alvast dat bij het oplossen van het probleem de driehoek van Pascal uit deel 2 ook om de hoek komt kijken.

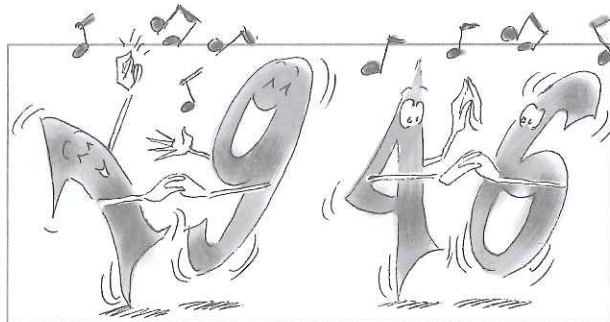


Les 7 Wiscalculie deel 1

Er zijn tetsken wraain gegezd wrdot dat het niet uimtkaat in wlkee vloogdre de ltteers in een wrood saaln. Het einge wat blegnaijrk is is dat de eretse en de ltaitse ltteer op de juitse patals saaln. Je knut gwoeon lzeen wat er saatt.



Je knut je agfrvaen of zieots ook gdelt voor de vloogdre van de cerfijs in gtelalen.



Bij onderstaande sommen is iets veranderd, zodat ze niet meer kloppen. Wel staan bij elk getal het eerste en het laatste cijfer zeker op de juiste plaats. Maar de twee tussenliggende cijfers kunnen al dan niet van plaats gewisseld zijn.

1 Maak de sommen kloppend.

de foute som

$$4950 + 4280 = 8780$$

$$1485 + 6239 = 7184$$

$$3906 + 5188 = 8194$$

de juiste som

$$4590 + 4280 = 8870$$

Bij de volgende foute som zijn twee juiste sommen te maken. Welke twee?

2 $2204 + 7651 = 9585$

En welke twee bij de volgende?

$$2204 + 7651 = 9675$$

Dit moet ook een foute som worden:

$$5432 + 3759 = \underline{\hspace{2cm}}$$

3 Noem alle 'foute' antwoorden waarbij het mogelijk is er een correcte som van te maken. Bij welke van die antwoorden zijn er twee mogelijkheden om een correcte som te maken?

We kunnen de manier om 'foute' sommen te maken iets veranderen.
Nu zijn ook het eerste en het laatste cijfer niet meer zeker van hun plaats.

- 4 $43 \times 76 = 2458$ Welke correcte som kun je maken bij deze foute som?

Er zijn zelfs ook correcte sommen die je kunt omzetten in een andere correcte som.

Zo kun je $678 - 432 = 246$ omzetten in $867 - 243 = 624$.

- 5 In welke andere sommen kun je $678 - 432 = 246$ nog meer omzetten?



6 $178 + 632 - 495 = 315$

$781 + 326 - 954 = 153$

Bekijk bovenstaande sommen eens goed.

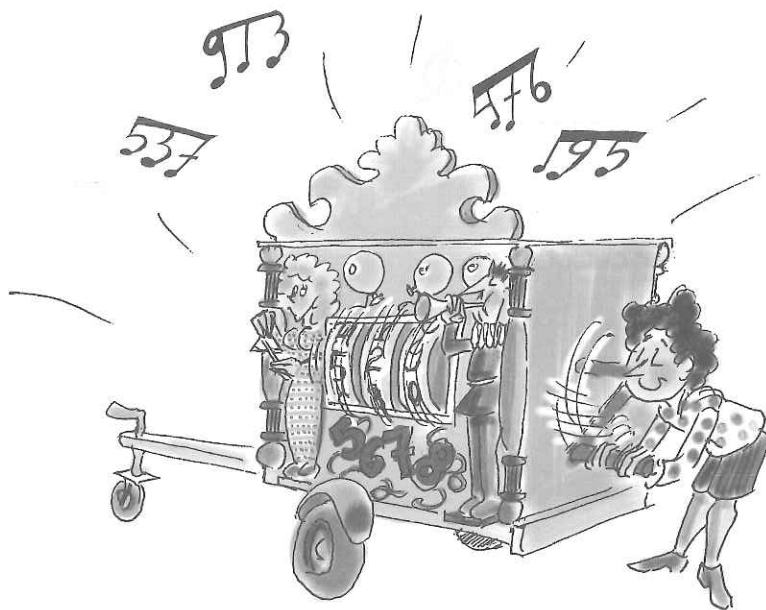
Als je vergelijkt wat er bij beide sommen op dezelfde plaatsen staat, zie je iets bijzonders.
De vergelijkbare getallen zijn uit precies dezelfde cijfers opgebouwd.
Dat is ook bij de antwoorden zo, die bovendien kloppen.
Beide sommen hebben een correct antwoord.

Kun je op deze manier van deze sommen nog andere correcte sommen maken?
Sommen waarbij binnen elk getal de cijfers van plaats mogen wisselen.

Neem je met één gevonden som genoeg of ga je op zoek naar meer?
Lukt het je om ze allemaal te vinden?

Les 8 Wiscalculie deel 2

Wiskundige problemen hebben vaak meer dan één oplossing. Soms wordt daarbij gevraagd om alle oplossingen te zoeken. Zoals bij het vraagstuk waar Les 7 mee eindigt.



$$178 + 632 - 495 = 315$$

$$781 + 326 - 954 = 153$$

In beide sommen zijn de vergelijkbare getallen opgebouwd uit precies dezelfde cijfers.

Dat is ook bij de antwoorden zo, die bovendien goed zijn.

Maak op deze manier vanuit deze sommen zoveel mogelijk andere correcte sommen.

Let op: Alle cijfers mogen van plaats wisselen, maar alleen binnen hun eigen getal!

Kun je alle sommen vinden?

De vraag naar alle oplossingen levert een extra wiskundig probleem op:

Hoe kan ik zeker weten of ik alle oplossingen gevonden heb?

In bovenstaand voorbeeld is dat nog niet zo'n eenvoudige vraag. Met het nodige proberen heb je vast wel een aantal oplossingen kunnen vinden. Hoeveel heb je er gevonden? Denk je dat je ze allemaal hebt?

Als je zeker wilt weten of je alle mogelijke oplossingen hebt, dan ontkom je er niet aan een goede strategie uit te stippelen.

Je kunt bijvoorbeeld beginnen met het onderzoeken van de getallen.

- 1 Hoeveel verschillende getallen kun je met de cijfers van 178 maken als je die ook in een andere volgorde mag zetten? Welke getallen zijn er op die manier uit 178 te maken?

Vervolgens kun je dezelfde vraag ook voor 632, voor 495 en voor 315 beantwoorden. Je vindt dan voor ieder van deze getallen zes mogelijkheden. Aansluitend zou je voor al die mogelijkheden de betreffende sommen kunnen onderzoeken.

Welke gecombineerde getallen leveren een som op met een correct antwoord?

Bij de tweede som, $781 + 326 - 954 = 153$, is dat het geval.

- 2 Hoeveel sommen zijn er op deze manier te onderzoeken?



Dan heb je dus wel een strategie, maar of het de meest handige is? Het zijn namelijk wel erg veel sommen om na te rekenen. Hoe kan het eenvoudiger?

Misschien helpt het om de sommen als volgt op te schrijven: $178 + 632 = 315 + 495$.

Alleen als het resultaat links van het =teken gelijk is aan het resultaat rechts, is er sprake van een correcte som.

De eerste tabel levert alle mogelijke antwoorden voor het linkerdeel.

3 Vul deze tabel verder in.

+	236	263	326	362	623	632
178	414					
187						
718						
781						
817						
871						

De tweede tabel levert de mogelijke antwoorden voor het rechterdeel.

4 Vul de randen en de binnenkant van deze tabel in.

+						

Vergelijk de resultaten in de beide tabellen. Als het goed is moet je nu alle mogelijkheden met correcte sommen kunnen afleiden.

5 Schrijf hieronder alle oplossingen op van het laatste vraagstuk van Les 7.

.....

.....

.....

.....

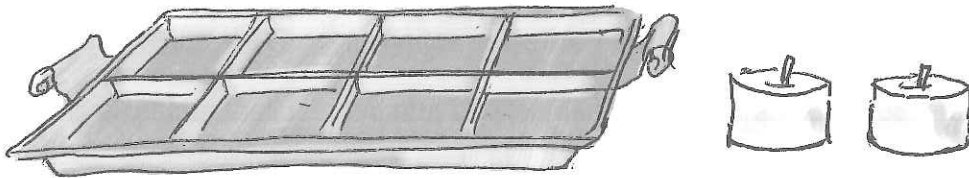
.....

.....



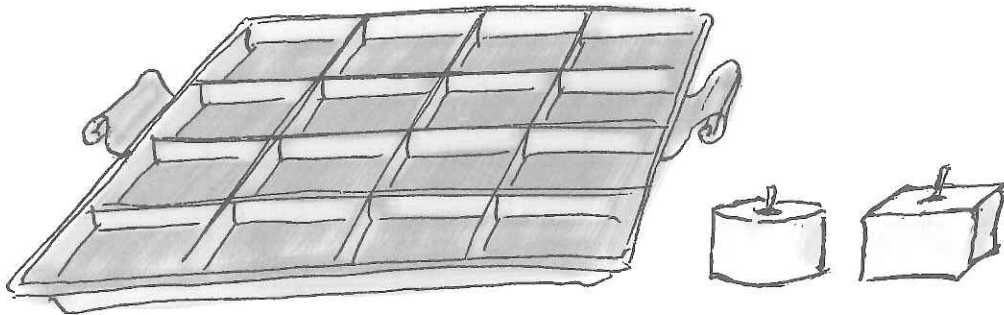
Toets 2

1



figuur 1

In de kaarsenhouders van figuur 1 worden twee kaarsjes geplaatst. Hoeveel verschillende opstellingen zijn er voor die twee kaarsjes in de kaarsenhouders? Alle situaties waarbij precies dezelfde vakjes in de houder bezet zijn, gelden als een en dezelfde opstelling.



figuur 2

2

In de kaarsenhouders van figuur 2 worden ook twee kaarsjes geplaatst. De twee kaarsjes zijn verschillend, het ene is rond, het andere is vierkant. Hoeveel verschillende opstellingen zijn er voor deze twee kaarsjes in de kaarsenhouders?



3 $59 - 13 =$

Onderzoek wat er gebeurt met bovenstaande som als je de getallen mag veranderen. Bij elk afzonderlijk getal zijn er twee keuzemogelijkheden. Je wisselt de cijfers om (59 wordt 95) of je laat de cijfers in dezelfde volgorde staan.



3a Hoeveel verschillende sommen kun je op deze manier laten ontstaan?

We noemen twee sommen met een correct antwoord een koppel als je de ene som uit de andere som kunt maken door van ieder getal de cijfers om te wisselen. Hierbij moeten ook de cijfers van het antwoord van plaats wisselen!

3b Hoeveel koppels leveren de sommen op die bij vraag 3a ontstaan? Schrijf de koppels hieronder op.

3c Bedenk zelf nog een aftreksom die twee koppels oplevert met deze manier van cijfers omwisselen.

3d Deze manier van cijfers omwisselen kun je ook toepassen op optelsommen. Hoeveel koppels levert de som $73 + 16$ op?

3e Bedenk een optelsom die met deze manier van omwisselen wel twee koppels oplevert.

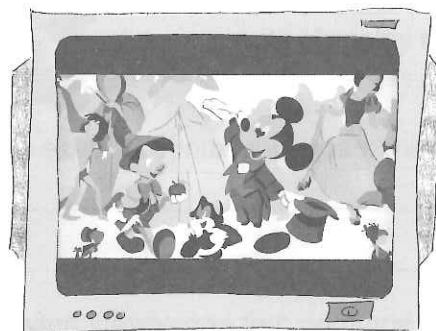


3f Extra
Kun jij twee getallen onder 100 vinden waarvoor het volgende geldt? De aftreksom levert twee koppels op én de optelsom levert twee koppels op.

Les 9 Breedbeeldtelevisie deel 1

*Bij een breedbeeldtelevisie is de beeldverhouding van breedte en hoogte 16 : 9 .
Lange tijd hadden de meeste televisietoestellen een beeldverhouding van 4 : 3 .
Onze ogen kunnen verhoudingsgewijs veel meer in de breedte waarnemen.
Daarom sluit het breedbeeldformaat beter aan bij ons gezichtsveld.
In deze les spelen diverse getallen rondom breedbeeldtelevisie een belangrijke rol.*

Een speelfilm in breedbeeldformaat komt op een 4:3 scherm niet zo goed tot zijn recht.
Om alles in beeld te krijgen, wordt zo'n film meestal getoond met zwarte balken boven en onder het beeld.



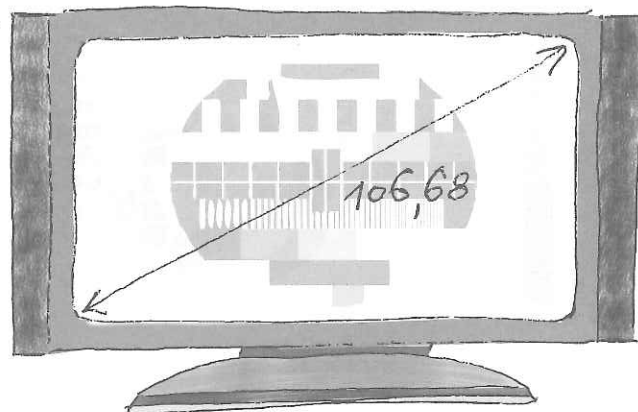
In je fantasie zou je misschien liever in de breedte een stuk aan het scherm plakken.
Dan zou je die zwarte balken niet nodig hebben en zie je de film nog beter.



In beide gevallen is de film in 16:9 formaat te zien.
In het ene geval gaat er een deel van het scherm af door de zwarte balken.
In het andere geval komt er een deel bij het scherm door het plakken.

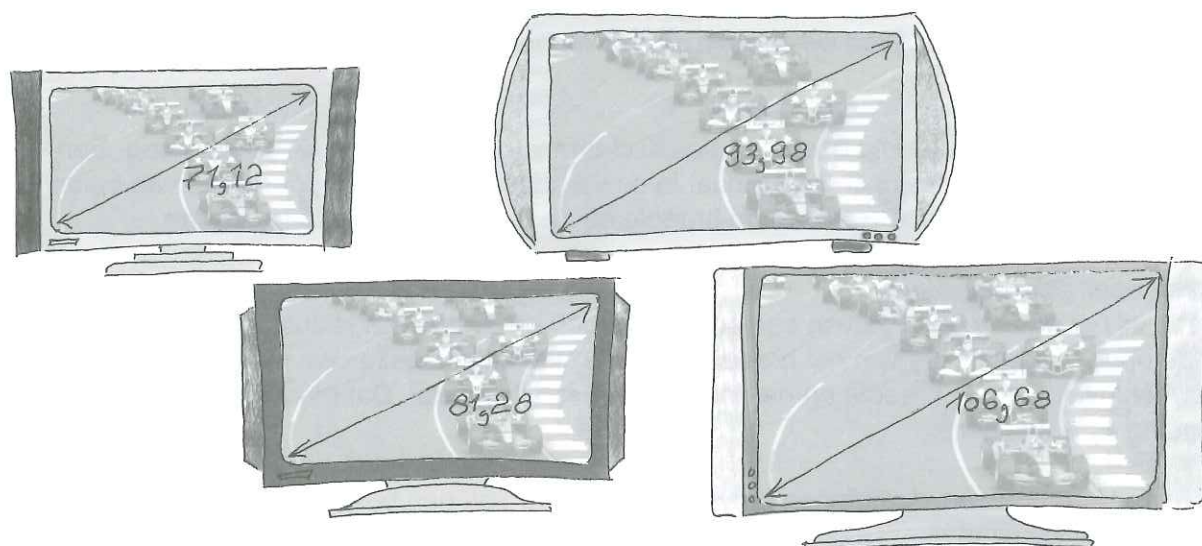
- 1 Welk deel is groter? Gaat er een groter stuk van het scherm af dan erbij komt of komt er een groter stuk bij dan eraf gaat?

Het beeldformaat van een televisie wordt diagonaal gemeten.
Op de volgende pagina staan vier toestellen afgebeeld.
De getallen die het formaat aangeven lijken misschien wat onsamenhangend.
Toch is er een verband tussen de vier getallen bij de diagonalen.
Via dat verband kun je er zelfs vier gehele getallen van maken!

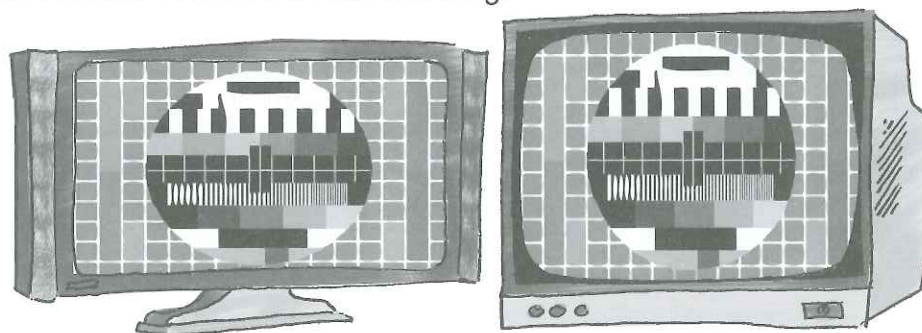


- 2 Welk verband bestaat er tussen de vier getallen?
Welke gehele getallen kun je erin ontdekken?

Hint: Bereken de verschillen tussen de opeenvolgende diagonalen. Welk verband ontdek je dan?



Als je een breedbeeldtelevisie wilt vergelijken met een 4:3 formaat televisie, dan kun je op verschillende factoren letten. Meestal hebben breedbeeldtelevisies een groter scherm, maar er zijn ook beeldschermen denkbaar met een even grote oppervlakte. Zoals bij de televisietoestellen in onderstaande tekening.



De televisie links op de tekening is een nieuwe breedbeeldtelevisie. Het beeldscherm heeft breedbeeldformaat 16:9.

De televisie rechts is een oud televisietoestel, het beeldscherm heeft formaat 4:3.

De oppervlakte van beide beeldschermen is even groot.

- 3 De schermbreedte van de breedbeeldtelevisie is 80 cm. Wat is de schermhoogte van deze televisie?

- 4 Bereken zo nauwkeurig mogelijk de schermbreedte en schermhoogte van het oude toestel. Laat zien hoe je die afmetingen berekent.

Je zult wel merken dat dit niet een probleem is dat je snel even oplost. In Les 10 bekijken we een speciale manier om zo'n probleem aan te pakken. Als jij al wel een oplossing gevonden hebt, hebben we nog een extraatje voor je.

- 5 Welk van de twee beeldschermen heeft de langste diagonaal?

Les 10 Breedbeeldtelevisie deel 2

In Les 9 staat een vraagstuk over de afmetingen van verschillende beeldschermen met dezelfde oppervlakte. In deze les bekijken we een bijzondere manier om de oplossing te vinden.

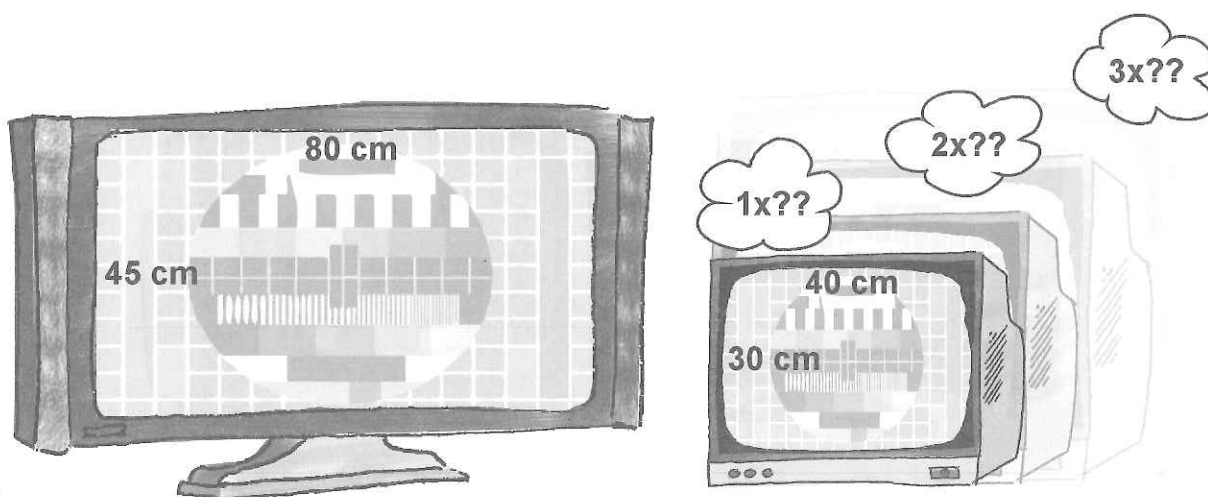
Het probleem

Een nieuwe breedbeeldtelevisie heeft een beeldscherm van 80 cm breed en 45 cm hoog. Een oude televisie heeft een beeldschermformaat in de verhouding 4 : 3. De oppervlakte van beide beeldschermen is even groot. Bereken de breedte en de hoogte van het oude scherm.

Een weg naar de oplossing

We gaan bij het oude toestel uit van een scherm van 40 bij 30 cm. Dat is duidelijk te klein. Om dezelfde oppervlakte als die van het breedbeeldscherm te krijgen zullen we moeten vergroten. We vermenigvuldigen de breedte en de hoogte met hetzelfde getal. Dat moet wel, anders blijft de verhouding 4 : 3 niet gelijk.

We zoeken twee grenzen waarbinnen de vergrotingsfactor ligt, een bovengrens en een ondergrens. Daarna zoeken we twee nieuwe grenzen die binnen de oude grenzen liggen. Door steeds nieuwe grenzen te zoeken binnen de oude, komen we steeds dichterbij de precieze vergrotingsfactor. De ruimte tussen de grenzen, het interval, wordt steeds kleiner.



1

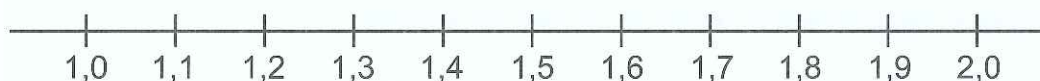
1a Hoe groot is de oppervlakte van het breedbeeldscherm?

1b Hoe groot is de oppervlakte van het scherm van het oude toestel bij vergrotingsfactor 2? De breedte (40 cm) wordt twee keer zo groot en ook de hoogte (30 cm).

De precieze vergrotingsfactor zal dus tussen ondergrens 1 en bovengrens 2 liggen. Tussen de afmetingen van het oude scherm bij de ondergrens, 40 bij 30 cm, en die bij de bovengrens, 80 bij 60 cm, ligt echter nog veel ruimte. Het kan preciezer.

1c Geef eerst een schatting van de precieze vergrotingsfactor (één cijfer achter de komma).

We zoeken naar een nieuwe ondergrens en bovengrens voor de vergrotingsfactor. Nu op een nog kleiner gebied, een kleiner interval.

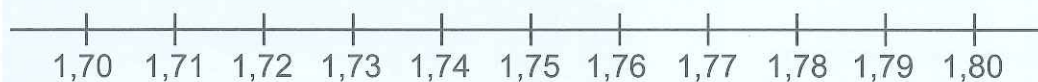


figuur 1

- 1d Bereken welke twee opeenvolgende getallen op de getallenlijn in figuur 1 ondergrens en bovengrens zijn voor de precieze vergrotingsfactor.

- 1e Bereken wat de afmetingen van het oude beeldscherm zouden zijn bij de gevonden ondergrens. Doe dat ook bij de gevonden bovengrens.

Je snapt het al, we kunnen zo ver doorgaan als we willen. We verleggen nog een keer onze grenzen.

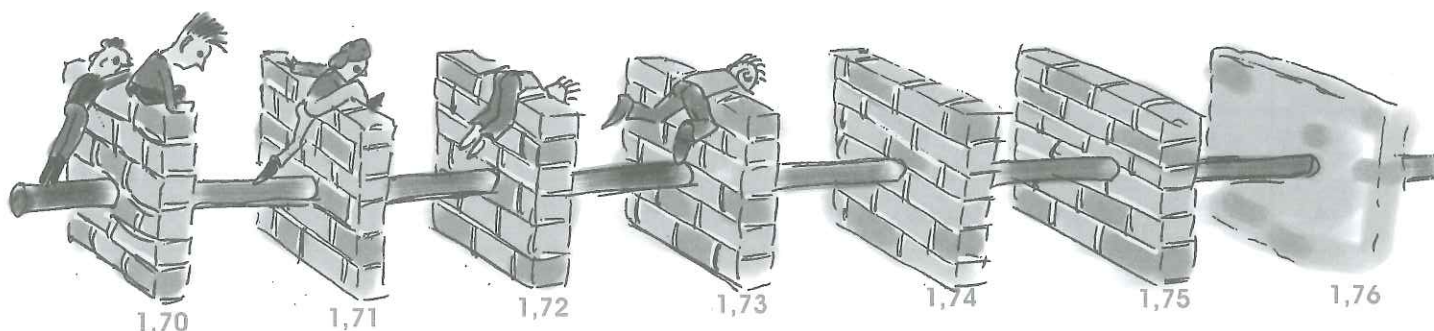


figuur 2

- 1f Bereken welke twee opeenvolgende getallen op de getallenlijn in figuur 2 ondergrens en bovengrens zijn voor de precieze vergrotingsfactor. Bereken ook wat de afmetingen van het oude beeldscherm zouden zijn bij deze ondergrens en bereken de afmetingen bij deze bovengrens.

- 1g Ga nog één decimaal verder en bereken weer een ondergrens en bovengrens. Neem de ondergrens die je nu vindt als vergrotingsfactor. Wat zijn bij deze vergrotingsfactor de oppervlakte en de afmetingen van het oude beeldscherm?

Met deze afmetingen heb je een zeer nauwkeurige oplossing van het vraagstuk. Of wil jij zelfs nog over deze grenzen kijken?



Een parallelweg

In de hierboven beschreven aanpak zoeken we naar een vergrotingsfactor. Stel we geven de precieze vergrotingsfactor een naam, we noemen hem p . De vergrote oppervlakte van het oude scherm is dan $p \times 40 \times p \times 30 = p^2 \times 1200$. Dat moet dezelfde oppervlakte zijn als die van het breedbeeldscherm, 3600 cm^2 .

Dus $1200 \times p^2 = 3600$, daaruit volgt dat $p^2 = 3600 : 1200 = 3$. In deel 2 van *Topklassers Wiskunde* (Les 8) heb je kunnen zien dat p nu gelijk is aan $\sqrt{3}$.

Wat we in deze les gedaan hebben komt eigenlijk neer op het benaderen van $\sqrt{3}$. Je kunt het getal via nieuwe onder- en bovengrenzen steeds nauwkeuriger berekenen. Als je nog een aantal stappen verder gaat met benaderen vind je hetzelfde resultaat dat ook je rekenmachine laat zien wanneer je $\sqrt{3}$ intoetst.

Les 11 Voetbaluitslagen Champions League deel 1

Heb jij dat ook wel eens? Je wilt iets opzoeken in de krant, maar juist de betreffende bladzijde is weg. Je zoekt bijvoorbeeld naar de voetbaluitslagen, maar niks hoor. Een overzicht van de standen is het enige dat je nog kunt vinden. Gelukkig kun je dan met logisch redeneren al behoorlijk wat afleiden.

In de groepen van de Champions League zijn de eerste twee wedstrijden gespeeld. Elke club heeft een thuiswedstrijd en een uitwedstrijd achter de rug. Ibrahim en Guus bekijken de stand in Groep A.



Champions League 2008-2009: De stand

Groep A

	Club	Wed	w	g	v	p	v-t
1	Chelsea	2	1	1	0	4	4-0
2	CFR Cluj	2	1	1	0	4	2-1
3	AS Roma	2	1	0	1	3	4-3
4	Girondins de Bordeaux	2	0	0	2	0	1-7

Guus weet dat Chelsea de eerste wedstrijd thuis speelde.

Ibrahim weet dat er in Groep A in de wedstrijden van de tweede ronde bij elkaar minder doelpunten vielen dan in de wedstrijden van de eerste ronde.

En jij, wat weet jij nu?

1 Vul de uitslagen in van de eerste twee ronden voor Groep A.

gespeelde wedstrijden eerste ronde

uitslag

.....

.....

gespeelde wedstrijden tweede ronde

uitslag

.....

.....

Marcella en Gianni bekijken de stand in Groep C.

Champions League 2008-2009: De stand

Groep C

	Club	Wed	w	g	v	p	v-t
1	FC Barcelona	2	2	0	0	6	5-2
2	Shakhtar Donetsk	2	1	0	1	3	3-3
3	Sporting Lissabon	2	1	0	1	3	3-3
4	FC Basel	2	0	0	2	0	1-4

Marcella weet dat FC Barcelona in de tweede ronde op bezoek moest bij Shakhtar Donetsk. Gianni weet dat FC Basel juist in die ronde met meer doelpunten verschil verloor dan in de eerste wedstrijdronde.

- 2 Welke twee mogelijkheden zijn er nog voor de uitslagen van groep C? Vul hieronder een van de mogelijkheden in.

gespeelde wedstrijden eerste ronde

uitslag

.....

.....

gespeelde wedstrijden tweede ronde

uitslag

.....

.....

Vul hieronder de andere mogelijkheid in.

gespeelde wedstrijden eerste ronde

uitslag

.....

.....

gespeelde wedstrijden tweede ronde

uitslag

.....

.....



Met een van de volgende drie aanwijzingen weet je welke mogelijkheid de goede is.

- FC Barcelona speelt in de derde ronde tegen FC Basel
- In een van beide wedstrijden scoorde FC Barcelona drie maal.
- In beide wedstrijden kreeg FC Barcelona een doelpunt tegen.

- 3 Welke aanwijzing heb je nodig om de uitslagen van Groep C zeker te weten?

.....

Les 12 Voetbaluitslagen Champions League deel 2

In de derde speelronde van de Champions League spelen de clubs tegen elkaar die elkaar in de voorgaande twee ronden nog niet hebben getroffen. In Les 11 is van de groepen A en C de stand na twee wedstrijden te zien. Die standen zullen we in deze les als uitgangspunt nemen.



Na de derde wedstrijd zal een nieuwe stand ontstaan zijn. Hieronder staan vier verschillende standen van Groep C.

Stand C1 Groep C							
	Club	Wed	w	g	v	p	v-t
1	FC Barcelona	3	3	0	0	9	9-3
2	Shakhtar Donetsk	3	1	1	1	4	5-5
3	Sporting Lissabon	3	1	1	1	4	5-5
4	FC Basel	3	0	0	3	0	2-8

Stand C3 Groep C							
	Club	Wed	w	g	v	p	v-t
1	FC Barcelona	3	2	1	0	7	5-2
2	Sporting Lissabon	3	2	0	1	6	5-4
3	Shakhtar Donetsk	3	1	1	1	4	3-3
4	FC Basel	3	0	0	3	0	2-6

Stand C2 Groep C							
	Club	Wed	w	g	v	p	v-t
1	FC Barcelona	3	2	1	0	7	6-3
2	Shakhtar Donetsk	3	2	0	1	6	5-4
3	Sporting Lissabon	3	1	0	2	3	4-5
4	FC Basel	3	0	1	2	1	3-6

Stand C4 Groep C							
	Club	Wed	w	g	v	p	v-t
1	FC Barcelona	3	3	0	0	9	10-2
2	Sporting Lissabon	3	2	0	1	6	4-3
3	Shakhtar Donetsk	3	1	0	2	3	3-4
4	FC Basel	3	0	0	3	0	1-9

- 1 Zijn alle vier de standen in theorie mogelijk? Welke standen zouden een vervolg kunnen zijn op de stand na twee wedstrijden zoals die in Les 11 staat? En welke niet? Verklaar je antwoord en geef de uitslagen van de mogelijk gespeelde wedstrijden. Shakhtar Donetsk en FC Basel spelen hun derde wedstrijd thuis.

2 Bedenk nu zelf ook een vraagstuk met voetbaluitslagen.

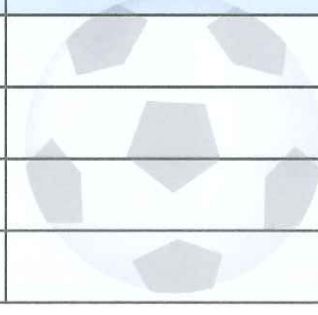
Maak drie standen voor Groep A na drie wedstrijden. (zie Les 11 voor de stand na twee wedstrijden)
Een van de drie standen moet een tegenstrijdigheid bevatten, die stand kan niet ontstaan. De andere twee standen moeten (in theorie) wel mogelijk zijn.

Vraag een (Top)klasgenoot om erachter te komen welke standen een vervolg kunnen zijn op de stand na twee wedstrijden en welke niet. Als die gelegenheid er niet is, vraag dan de leerkracht om jouw werk te bekijken.

Stand A1		Groep A					
	Club	Wed	w	g	v	p	v-t
1							
2							
3							
4							



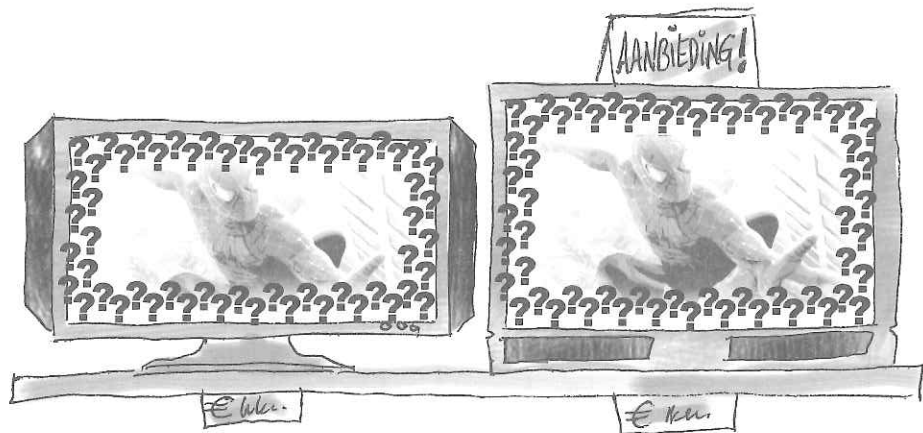
Stand A2		Groep A					
	Club	Wed	w	g	v	p	v-t
1							
2							
3							
4							

Stand A3		Groep A					
	Club	Wed	w	g	v	p	v-t
1							
2							
3							
4							



Toets 3

- 1 In een winkel voor audio- en videoapparatuur vergelijkt een klant twee televisietoestellen. Het ene toestel heeft een beeldscherm van 80 cm breed en 40,5 cm hoog. Het andere toestel heeft een beeldscherm van 80 cm breed en 49,5 cm hoog.



Een film wordt op beide toestellen zo groot mogelijk in beeld gebracht. Dat gebeurt in beide gevallen in een 16:9 formaat. De randen van het scherm buiten deze verhouding worden zwarte balken. Er zijn twee mogelijkheden. De zwarte balken bevinden zich boven en onder op het scherm. Of de balken zijn te zien aan de zijkanten links en rechts.

- 1a Waar zijn de zwarte balken te zien op het scherm van 40,5 cm hoog?

- 1b Waar zijn de zwarte balken te zien op het scherm van 49,5 cm hoog?

- 1c Bij welk van de twee toestellen is het percentage zwart het hoogst?

- 1d Welke argumenten kun je bedenken om voor het kleinste toestel te kiezen?

- 1e Welke argumenten kun je bedenken om voor het grootste toestel te kiezen?



- 2 De eerste drie wedstrijden in groep B van de Champions League in 2008 leverden de volgende stand op:

Groep B							
	Club	Wed	w	g	v	p	v-t
1	Internazionale	3	2	1	0	7	4-1
2	Anorthosis	3	1	1	1	4	3-2
3	Werder Bremen	3	0	3	0	3	3-3
4	Panathinaikos	3	0	1	2	1	3-7

Alleen tegen Anorthosis kwam Werder Bremen niet tot scoren.



Vul de uitslagen in.

dinsdag 16 september			
Tijd	Thuis	Uit	Uitslag
20:45	Panathinaikos	Internazionale	
20:45	Werder Bremen	Anorthosis	

woensdag 1 oktober			
Tijd	Thuis	Uit	Uitslag
20:45	Anorthosis	Panathinaikos	
20:45	Internazionale	Werder Bremen	

woensdag 22 oktober			
Tijd	Thuis	Uit	Uitslag
20:45	Internazionale	Anorthosis	
20:45	Panathinaikos	Werder Bremen	

Les 13 Vrijdag de dertiende

De vrijdag is een dag die vaak gekozen wordt als trouwdag. Vrijdag de dertiende echter zien nogal wat mensen als een ongeluksdag. Op een dergelijke datum zullen bijgelovige mensen niet zo snel hun trouwdag plannen.



Vrijdag de dertiende kan op deze manier allerlei vragen oproepen.

- 1 Hoe vaak komt vrijdag de dertiende dit jaar voor? Komt vrijdag de dertiende elk jaar even vaak voor? Als dat niet zo is, hoe vaak per jaar kan vrijdag de dertiende dan voorkomen? Zijn er jaren zonder een vrijdag de dertiende?

Dit zijn natuurlijk vragen waarbij het nodige onderzoek te doen valt. Op de volgende pagina staan enkele hulpopdrachten die je op weg kunnen helpen. Wil je liever de vragen aanpakken zonder verdere aanwijzingen, dan ga je je gang en schrijf hieronder je resultaten. Probeer bij je onderzoek ook een regelmaat te ontdekken. Misschien kun je dan per jaar voorspellen hoe vaak vrijdag de dertiende voorkomt.



Laten we eerst de situatie bekijken voor het jaar 2009, het jaar waarin deel 3 van *Topklassers Wiskunde* is uitgebracht.

- 2 Hoe vaak komt vrijdag de dertiende voor in het jaar 2009? Schrijf in de tabel onder elke maand de dag waarop de *dertiende* valt.

2009	13 valt op	jan	feb	mrt	apr	mei	jun	jul	aug	sep	okt	nov	dec
		di											

- 3 Beantwoord dezelfde vraag voor het jaar 2010.

2010	13 valt op	jan	feb	mrt	apr	mei	jun	jul	aug	sep	okt	nov	dec

- 4 Hoe komt het dat ten opzichte van 2009 elke dertiende in 2010 een dag doorschuift?

- 5 In welke aaneengesloten periode van zeven maanden in 2009 komen alle dagen van de week precies één maal voor als dertiende? Is er in 2010 ook zo'n periode?

- 6 Weet je nu of er een jaar is waarin vrijdag de dertiende niet voorkomt?

- 7 Hoe ziet de tabel er uit in 2012? En in 2013?

2012	13 valt op	jan	feb	mrt	apr	mei	jun	jul	aug	sep	okt	nov	dec

2013	13 valt op	jan	feb	mrt	apr	mei	jun	jul	aug	sep	okt	nov	dec

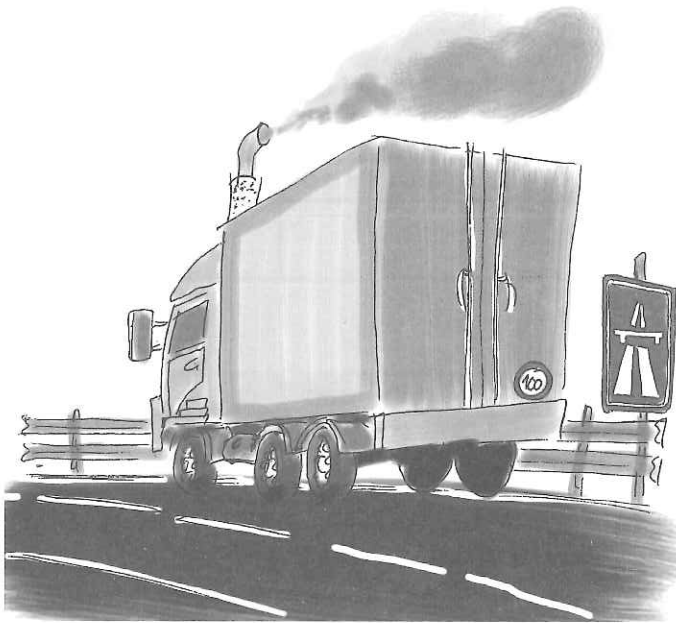
In bovenstaande jaren komt vrijdag de dertiende één, twee of drie maal voor.

- 8 Kan vrijdag de dertiende ook vaker dan drie maal in één jaar voorkomen?

- 9 Wat is na 2012 het eerstvolgende jaar met drie maal vrijdag de dertiende?



Les 14 De 'snelste' vrachtwagen



Meestal wil een vrachtwagenchauffeur graag snel op de plaats van bestemming aankomen. Hij (of ook wel eens zij) heeft echter te maken met verschillende maximumsnelheden. Op de snelweg is 100 km/u de maximumsnelheid voor een vrachtwagen. En binnen de bebouwde kom mag een vrachtwagen niet harder dan 50 km/u.

De baas overlegt met twee chauffeurs wie welke route gaat rijden. Hij heeft twee routes van gelijke afstand 'in de aanbieding'. Beide routes gaan voor een deel door de stad en voor een deel over de snelweg.

De baas gaat er van uit dat er zich geen bijzondere dingen zullen voordoen. Zowel op de snelweg geen files als in de stad geen oponthoud door verkeerslichten en dergelijke. Dus je mag er voor het gemak ook steeds van uitgaan dat de maximumsnelheid kan worden gereden.

De baas stelt beide chauffeurs de volgende vraag:

Een van de twee routes gaat de helft van de tijd door de stad en de andere helft van de tijd over de snelweg. De andere route gaat de helft van de afstand door de stad en de andere helft van de afstand over de snelweg. Welke van de twee routes wil je het liefst rijden?

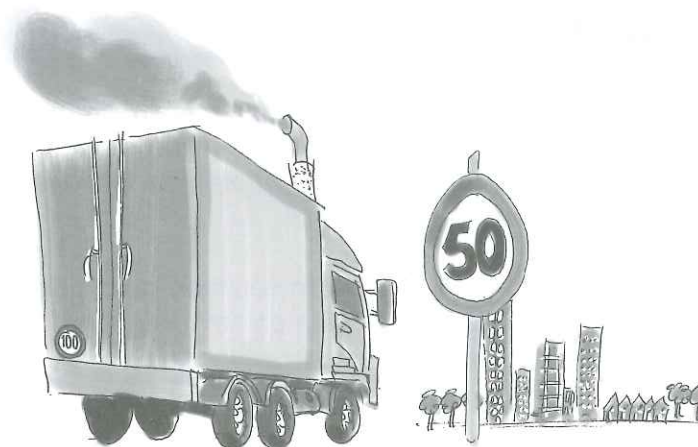
- 1 Bij welke route zal de vrachtwagen het snelst op de plaats van bestemming zijn?

Aan jou, Topklasser, niet alleen de vraag om hier een antwoord op te vinden.

We vragen je ook om op een heel duidelijke manier je antwoord uit te leggen. Probeer het zo te doen, dat iemand die jouw uitleg leest (bijvoorbeeld een chauffeur), het goed snapt en daardoor zeker dezelfde keuze zal maken.

Gebruik voor je uitleg de volgende pagina.



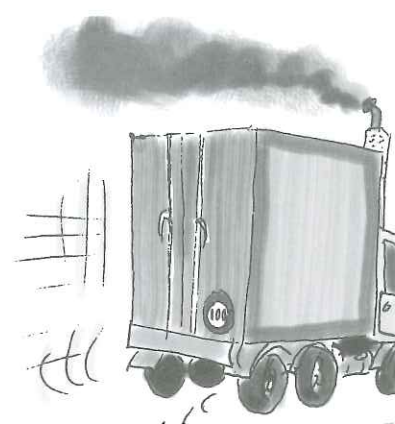


Ik kies de route

die de helft van de tijd door de stad gaat / die de helft van de afstand door de stad gaat

(doorhalen wat niet van toepassing is)

Hieronder maak ik duidelijk waarom ik dat vind.



Les 15 Een bouwdoos?

Soms lijkt het er op dat je met karton niet zo zuinig hoeft om te springen. Vaak komen kartonnen dozen bijvoorbeeld na gebruik terecht bij het oud papier. De hoeveelheid karton die dient als verpakkingsmateriaal is echter enorm. Daarom probeert men het bij de fabricage altijd optimaal te gebruiken.

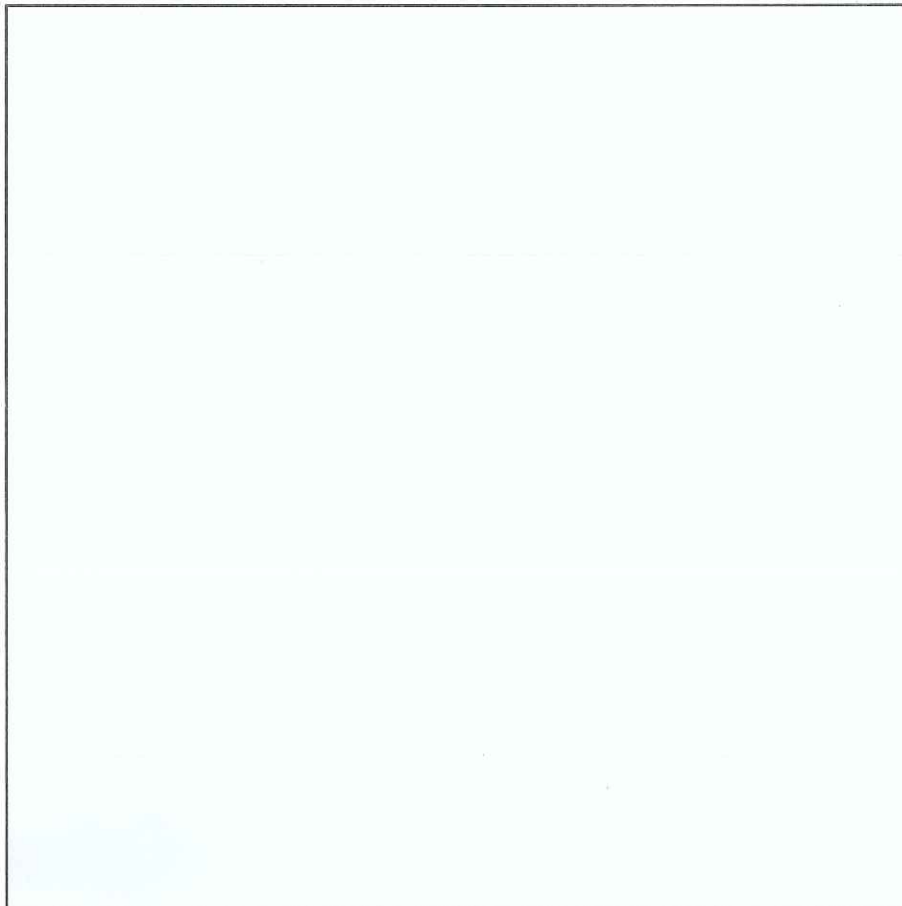
Bij het maken van dozen gaat men regelmatig uit van één stuk karton. Je kunt de doos dan in elkaar zetten door stukken te vouwen en om te klappen. Soms wordt er vooraf nog op enkele plaatsen iets weggesneden.

Hoe zou jij het doen?

Uit een vierkant stuk karton moet een doos gemaakt worden. Een doos zonder deksel, dus met alleen een bodem en vier zijanten. Het is de bedoeling een doos met een zo groot mogelijke inhoud te krijgen. Er mag gevouwen en gesneden worden, maar niet geplakt. De zijden worden later met tape aan elkaar bevestigd.



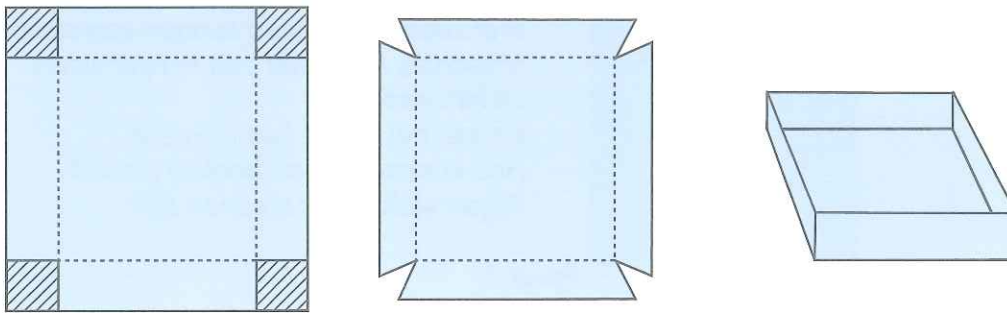
- 1 Hoe kan volgens jou het best de doos gemaakt worden? Gebruik als je wilt eerst een stuk karton om uit te proberen. Laat vervolgens in figuur 1 zien hoe je de doos kunt maken. Teken op de plaats van de vouwlijnen stippellijnen. Arceer de delen die je weg moet snijden. Zet er ook alle nodige afmetingen bij.



24 cm

Lees op de volgende pagina verder om je antwoord te vergelijken.

In figuur 2 is te zien hoe zo'n doos gemaakt kan worden. De lengte van het hele stuk karton is 24 cm. Als je uit de hoeken vierkante stukken snijdt, worden de vier zijanten even hoog. De lengte van de gearceerde vierkanten stellen we op a cm.



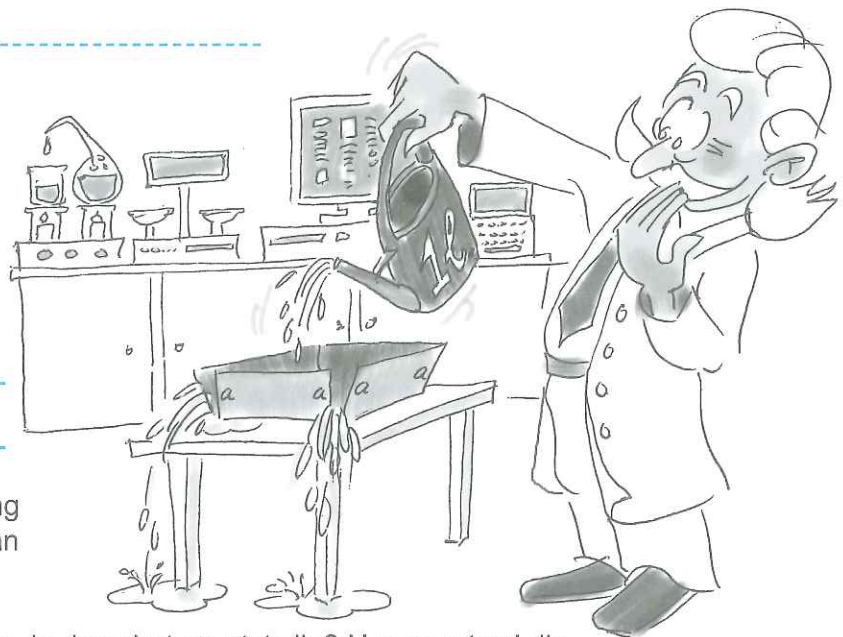
figuur 2

Natuurlijk willen we niet onnodig veel karton wegsnijden, dat is zonde. Wat echter nog belangrijker is, de doos moet een zo groot mogelijke inhoud hebben.

Voor het gemak willen we dat de hoogte van de doos een geheel aantal centimeters is. We hoeven dus voor a alleen gehele getallen te onderzoeken.

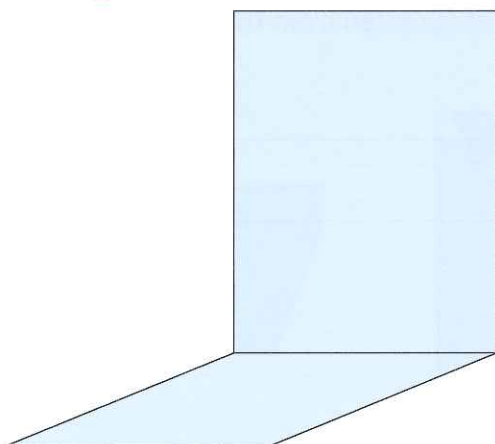
- 2 Welke gehele getallen moet je onderzoeken, ofwel welke waarden kan a aannemen?
- 3 Bij welke waarde(n) van a zal de inhoud van de doos meer dan 1 liter zijn? Geef de precieze inhoud van de doos voor alle waarden van a waarbij dat het geval is. Bij welke waarde van a is de inhoud van de doos het grootst?

- 4 We nemen een kleiner vierkant stuk karton van 12 cm lang. We stellen weer de lengte van de weg te snijden vierkanten op a cm. Bij welke waarde van a is nu de inhoud van de doos het grootst? Hoe groot is die inhoud?



- 5 Wat valt je op? Kun je een voorspelling doen voor een vierkant stuk karton van 48 cm lang? Bij welke lengte van het gearceerde vierkant zal in dat geval de inhoud van de doos het grootst zijn? Hoe groot zal die inhoud zijn? Reken na of je voorspelling klopt.

Les 16 Bekijk het... van een andere kant



figuur 1

In figuur 1 zijn zeven lijnstukken te zien.
Nemen onze hersenen daar genoeg mee?
Ze gaan waarschijnlijk op onderzoek uit.
Wat zouden die lijnen kunnen voorstellen?
Misschien is het wel een boekensteun.
Of iets anders.
En stel het is een boekensteun.
Hoe kunnen dan de boeken staan?
Tegen welke kant steunen ze?

In deel 1 van *Topklassers Wiskunde* heb je kennis kunnen maken met het assenstelsel. Daarvan maken we in deze les gebruik om diepte te zoeken in het platte vlak.

- 1 Teken in het assenstelsel van figuur 2 de volgende punten:
A (10,0), B (14,2), D (0,10), F (14,12)
en G (4,12).
*De x coördinaat wordt als eerste genoemd,
de y coördinaat als tweede.*

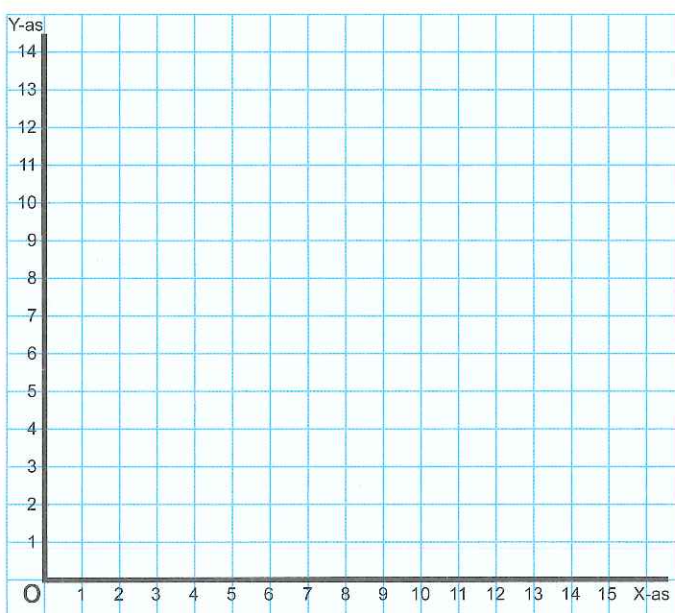
Teken vervolgens de lijnstukken OA, AB, BF,
FG, OD en DG.

- 2 Vierhoek OAED is een vierkant.
Teken dit vierkant.

Wat zijn de coördinaten van E?

E = (,)

Teken het lijnstuk EF.



figuur 2

- 3 Bekijk de ontstane figuur goed. Beschrijf zo precies mogelijk wat je ziet. Zie je de figuur steeds hetzelfde of ontdek je ook *een andere kant*? Neem als voorbeeld vlak DEFG, zie je daarvan de bovenkant of de onderkant?

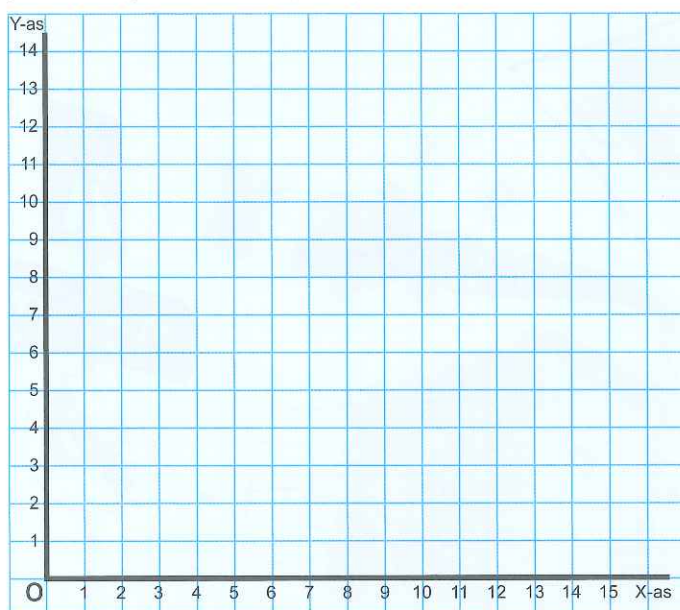
- 4 We nemen nu aan dat figuur OABCDEFG een kubus voorstelt met OABC als onderkant. Je kijkt van bovenaf op de bovenkant DEFG.

Lijnstukken die achter een ander vlak schuilgaan geven we aan met stippellijnen. Teken de lijnstukken OC, BC en CG.

Wat zijn de coördinaten van C? C = (,)

- 5 Teken in het assenstelsel van figuur 3 de punten A, B, C, D, F en G. Deze punten hebben alle dezelfde coördinaten als de punten A, B, C, D, F en G in de kubus van figuur 2.

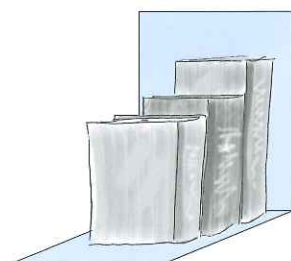
Teken vervolgens precies die verbindingslijnstukken die het doen lijken, alsof je tegen de onderkant OCBA van een kubus OCBADGFE aankijkt. Teken geen lijnstukken of punten die je vanuit jouw gezichtspunt niet ziet (dus ook geen stippellijnen).



figuur 3

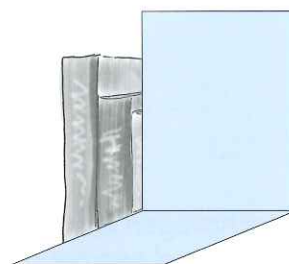
We keren terug naar de 'boekensteun' in figuur 1.

Staan de boeken zo



figuur 4

of staan ze zo?



figuur 5

Tegen welke kant steunen de boeken? Op welk vlak rusten ze? Wat zou er gebeuren als je beide situaties combineert?

- 6 Teken in figuur 3 enkele boeken en maak een combinatie van figuur 4 en figuur 5. In plaats van boeken kun je natuurlijk ook iets anders kiezen om te tekenen.

De boeken uit figuur 4

De boeken staan op de zichtbare kant van vlak OABC.
Ze steunen tegen de voorkant van vlak CBFG.

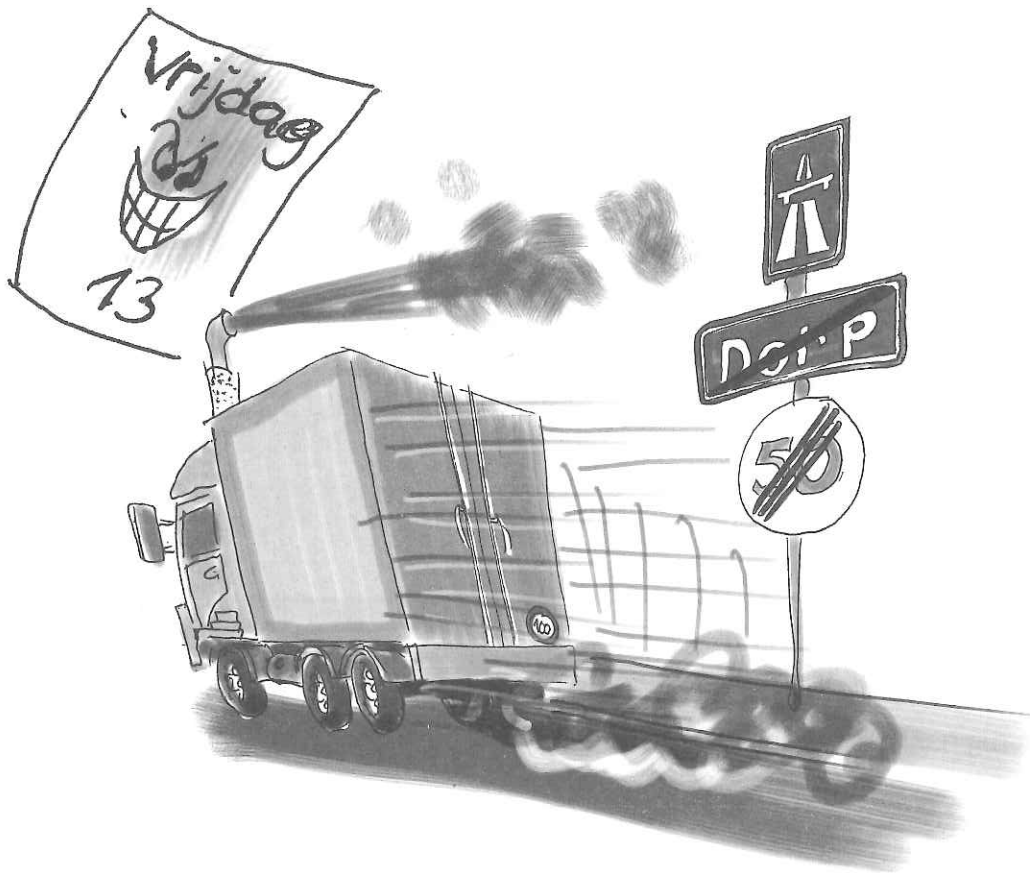
De boeken uit figuur 5

De boeken staan op de niet zichtbare kant van vlak OABC.
Ze steunen tegen de achterkant van vlak CBFG.

Op deze manier ontstaat een 'onmogelijke figuur'. Misschien krijg je net als de graficus M.C. Escher de smaak te pakken en maak je nog meer van zulke illus(trat)ies.

Toets 4

- 1 In welke maand of maanden van het jaar 2008 kwam er een vrijdag de dertiende voor?



- 2 Een vrachtwagen is precies een uur onderweg.
Een derde deel van het uur reed hij door de stad.
Het resterende deel bevond de vrachtwagen zich op de snelweg.

In de tachograaf is de gemiddelde snelheid van de vrachtwagen bijgehouden.
Op de snelweg was die het dubbele van de gemiddelde snelheid in de stad.
De vrachtwagen heeft een afstand afgelegd van 75 km.

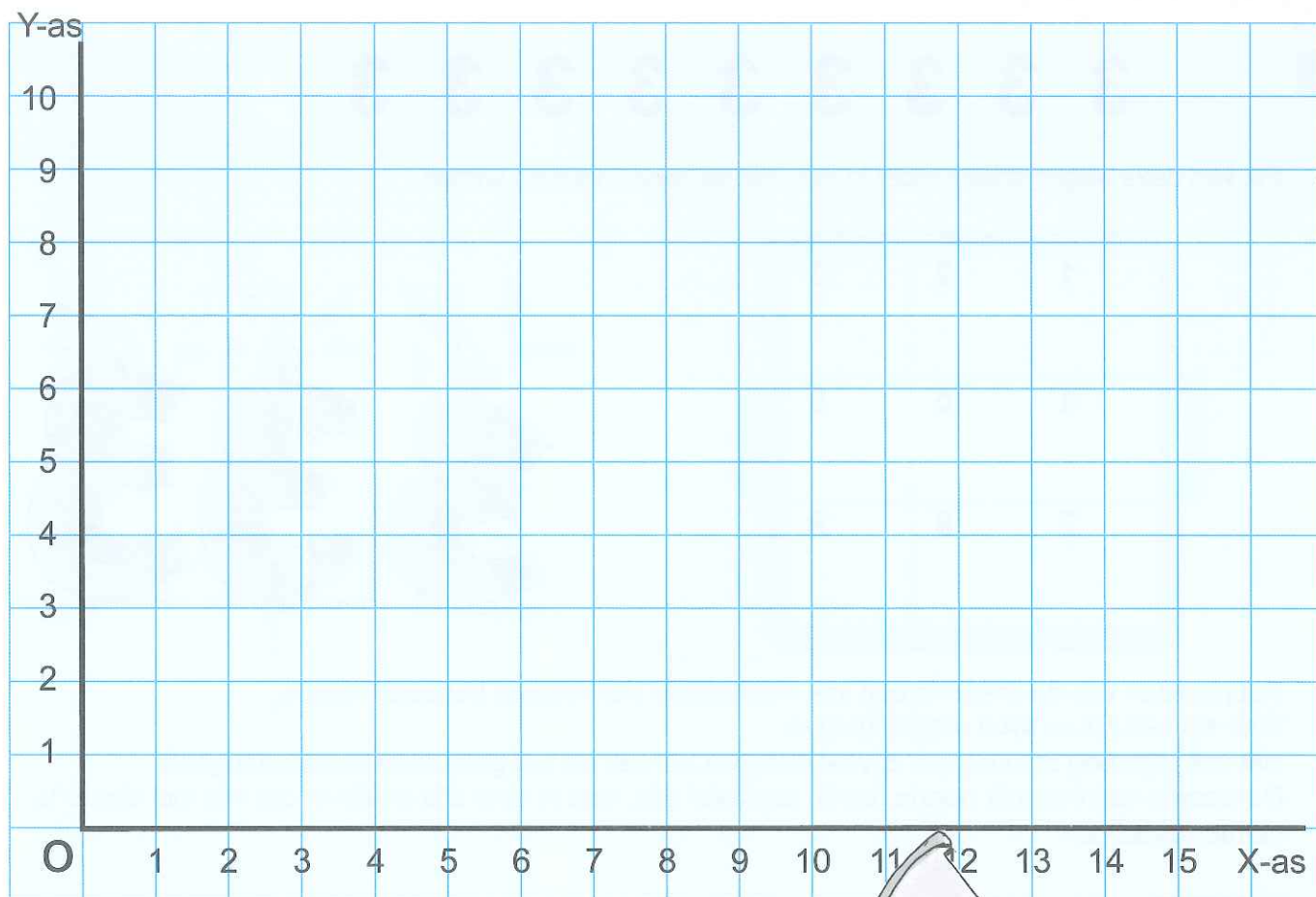
Met welke gemiddelde snelheid reed de vrachtwagen in de stad?
Met welke gemiddelde snelheid reed de vrachtwagen op de snelweg?

3

- 3a Teken in het assenstelsel van figuur 1 de volgende punten:

A (4,2), B (14,2), C (14,4), D (4,4), E (2,4), F (12,4), G (12,6) en H (2,6).

Zet niet de letters bij deze roosterpunten, maar teken de rechthoeken ABCD en EFGH.
Teken vervolgens ook de lijnstukken AE en CG.



figuur 1

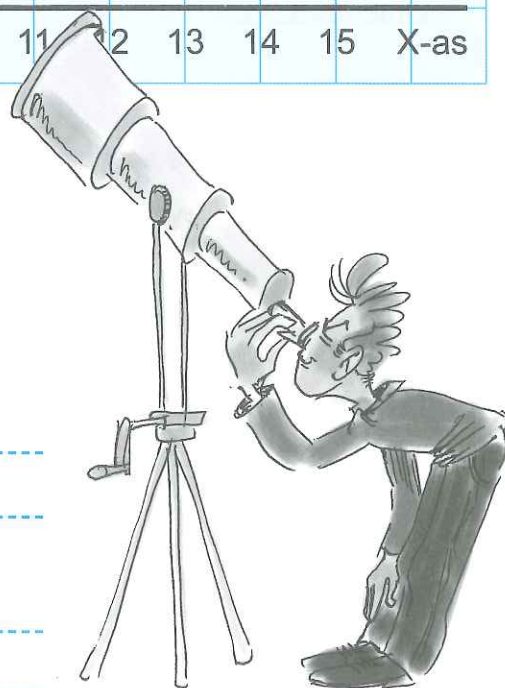
Bekijk de figuur die ontstaan is ruimtelijk.
 Als het goed is kun je er diepte in zien.
 Beantwoord op grond hiervan de volgende vragen.

- 3b Van welke rechthoeken kan driehoek FCG een deel zijn?

- 3c Van welke rechthoeken kan driehoek ADE een deel zijn?

- 3d $AB = 10$ cm. (De eenheid in het assenstelsel is 1 cm.)
 Teken lijnstuk DH en 'gum' lijnstuk ED tot een stippellijn. Nu kun je ABFEDCGH beschouwen als een doos met ABFE als bodem.
 Stel de inhoud van de doos is 100 cm^3 .

Wat is dan de lengte van zijde AE?

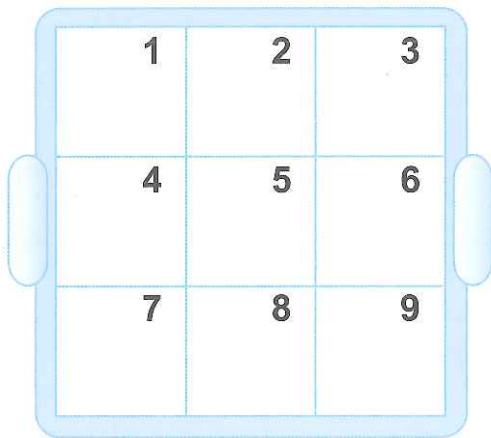


Eindtoets A

1

3 3 3 3 3 3 3 3 3

Elk van deze negen drieën moet in een van de negen vakken komen.



Het plaatsen van de drieën in een vak moet echter wel volgens bepaalde regels.

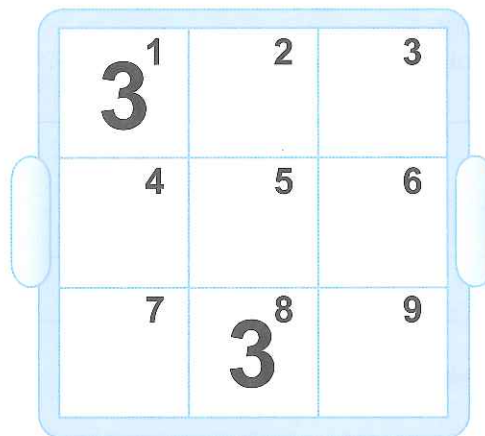
Voor elk vak zijn er twee mogelijkheden.

Het vak blijft leeg of er komen zoveel drieën in het vak als het getal rechtsboven aangeeft.

De waarde van een vak waarin drieën geplaatst zijn, vind je door alle drieën in dat vak met elkaar te vermenigvuldigen.

Voorbeeld

In 'vak 8' plaatsen we acht drieën. Omdat het vak anders erg vol wordt, schrijven we maar één drie.



De 8 geeft aan dat er acht drieën zijn en dat het vak waarde $3^8 = 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3$ heeft.

Er is nu nog maar één mogelijkheid voor de negende drie, namelijk in 'vak 1'.

De waarde van dit vak is nu $3^1 = 3$.

De waarde van de hele indeling vind je door van alle vakken waarin drieën geplaatst zijn de waarden met elkaar te vermenigvuldigen.

De waarde van deze indeling is dus $3^8 \times 3^1$.

Er zijn nog andere mogelijkheden om de drieën in de vakken onder te brengen.

Schrijf alle mogelijke indelingen op en bereken de waarde ervan.

- 2 Teken in het assenstelsel van figuur 1 een televisie. Het toestel heeft een scherm op breedbeeldformaat en staat op een voet. Op het scherm moet je twee voetbaluitslagen schrijven uit de eerste ronde in Groep G van de Champions League.

Gebruik de volgende informatie om die uitslagen te vinden.

In de tweede ronde speelt een team niet tegen de tegenstander uit de eerste ronde. Elke club speelt in de eerste twee ronden een thuiswedstrijd en een uitwedstrijd.

Van de sportpagina in de krant is een stuk afgescheurd.

Groep G

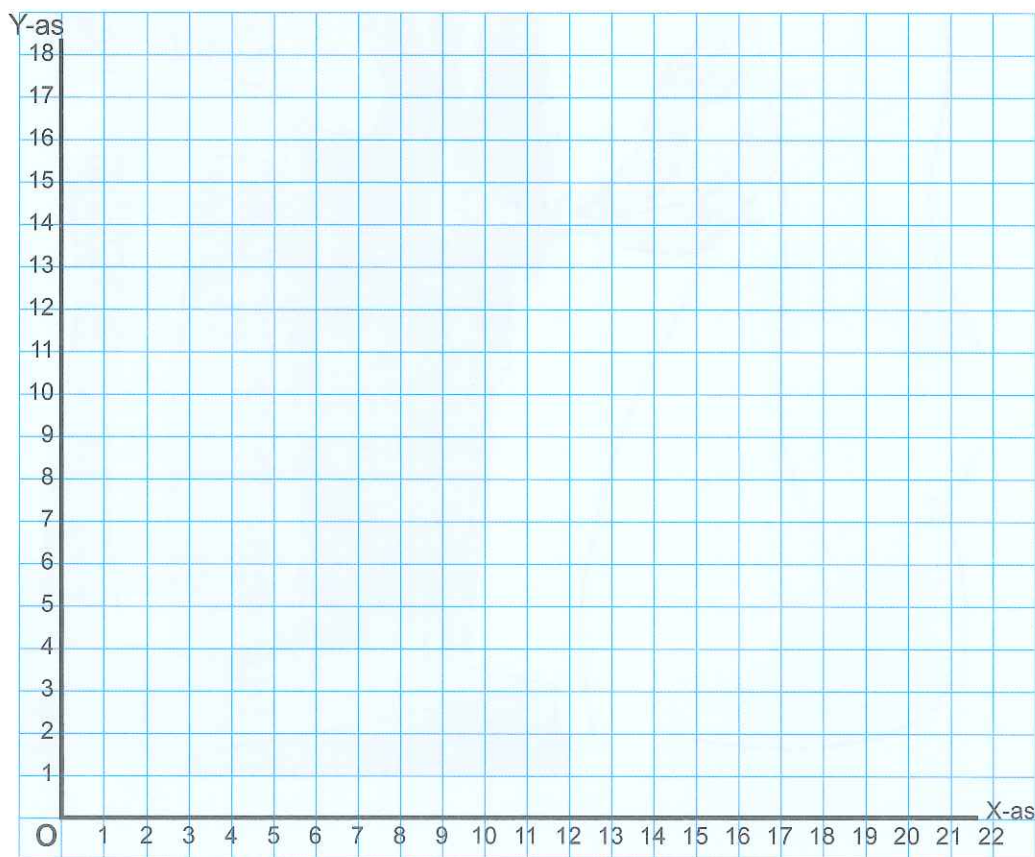
uitslagen tweede ronde Champions League

Arsenal - FC Porto

Fenerbahce - Dinamo Kiev

0 -

Groep G							
	Club	Wed	w	g	v	p	v-t
1	Arsenal	2	1	1	0	4	5-1
2	FC Porto	2	1	0	1	3	3-5
3	Dinamo Kiev	2	0	2	0	2	1-1
4	Fenerbahce	2	0	1	1	1	1-3



figuur 1

Eindtoets B

Meestal krijg je bij een toets vragen waarop je een antwoord moet geven.

Bij eindtoets B draaien we het om.

Je krijgt deze keer geen vragen, maar je krijgt acht antwoorden.

Aan jou de vraag om opdrachten te verzinnen bij minstens drie van de antwoorden.

Probeer interessante en uitdagende opdrachten te verzinnen.

Opdrachten op het niveau van een wiskunde topklasser.

En opdrachten die te maken hebben met de onderwerpen uit dit werkboek.

Dit zijn de antwoorden:

- op manier 1
- 3^5
- op 120 manieren
- $4257 + 2132 = 6389$
- $144 : 81$
- $3 - 0$
- 13 april
- (4,2)



**TOETS MAKEN!!
WIE WIL MIJN TOETS
MAKEN???**



Is er een topklasser die jouw toets kan maken?

Illustraties

Kre-add/Marcel Westervoorde, Alphen a/d Rijn

Vormgeving en lay-out

Kre-add/Marcel Westervoorde, Alphen a/d Rijn

Eerste druk, eerste oplage 2009

© 2009 Bekadidact, Baarn

Behoudens de in of krachtens de Auteurswet van 1912 gestelde uitzonderingen mag niets uit deze uitgave worden verveelvoudigd, opgeslagen in een geautomatiseerd gegevensbestand of openbaar gemaakt, in enige vorm of op enige wijze, hetzij elektronisch, mechanisch, door fotokopieën, opnamen of enige andere manier, zonder voorafgaande schriftelijke toestemming van de uitgever.

ISBN 978 90 262 4215 1